

Material Teórico - Módulo de Potenciação

Potenciação

Oitavo Ano

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto



1 Potência de expoente inteiro positivo

Antes de estudar potências, é conveniente relembrar as notações utilizadas para representar os conjuntos numéricos. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números **inteiros positivos** (ou **naturais**), $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ é o conjunto dos números **inteiros** e $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ é o conjunto dos números **racionais**. Utilizamos ainda $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ para denotar os **inteiros não nulos** e $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ para os **racionais não nulos**.

Se a é um número racional e n é um número inteiro positivo, a **potência** de **base** a e **expoente** n é definida por

$$\begin{aligned}a^1 &= a, \\a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}.\end{aligned}$$

Lê-se a **elevado a** n ou a elevado à n -ésima potência. Os casos $n = 2$ e $n = 3$ têm denominações especiais. Quando $n = 2$ lê-se a **elevado ao quadrado** e quando $n = 3$ lê-se a **elevado ao cubo**.

Exemplo 1. A potência

$$3.3.3.3.3 = 3^5$$

tem base 3 e expoente 5. Lê-se *três elevado a cinco* ou *três elevado à quinta potência*.

Exemplo 2. A potência

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

possui base $-\frac{1}{2}$ e expoente 3. Neste caso, lê-se *menos um meio elevado ao cubo*.

Exemplo 3.

$$(-0,3)^2 = (-0,3) \cdot (-0,3).$$

Lê-se *menos zero vírgula três elevado ao quadrado*.

Exemplo 4. Qual o algarismo das unidades de 4^{2015} ?

Solução. Observe que

$$\begin{aligned}4^1 &= 4, \\4^2 &= 4.4 = 16, \\4^3 &= 4.4.4 = 64, \\4^4 &= 4.4.4.4 = 256.\end{aligned}$$

Agora, sem calcular o valor da potência 4^5 , podemos ver que seu algarismo das unidades é 4. Desse modo, 4^6 tem 6 como algarismo das unidades. Concluímos que se o expoente n é ímpar, a potência 4^n tem algarismo das unidades igual a 4, e se o expoente é par, então tal algarismo é 6. Portanto, 4^{2015} tem 4 como algarismo das unidades. $\square$

Exemplo 5. Qual o algarismo das unidades de 3^{2015} ?

Solução. Veja que

$$\begin{aligned}3^1 &= 3, \\3^2 &= 3.3 = 9, \\3^3 &= 3.3.3 = 27, \\3^4 &= 3.3.3.3 = 81, \\3^5 &= 3.3.3.3.3 = 243, \\3^6 &= 3.3.3.3.3.3 = 729, \\3^7 &= 3.3.3.3.3.3.3 = 2187, \\3^8 &= 3.3.3.3.3.3.3.3 = 6561.\end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, sem calcular o valor das potências seguintes, podemos ver que o algarismo das unidades de 3^9 é 3, o de 3^{10} é 9, e assim por diante. Observe que os algarismos das unidades das potências listadas acima são 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, nesta ordem. Assim, fica claro que existe um ciclo de 4 números que se repetem como algarismo das unidades das potências de 3. Para saber tal algarismo em determinada potência, basta calcular o resto da divisão do expoente da potência por 4. Como 2015 deixa resto 3 quando dividido por 4, concluímos que o algarismo das unidades de 3^{2015} é 7. $\square$

Observação 6. Se $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q}\right)^n &= \frac{\overbrace{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \dots \cdot \frac{p}{q}}^{n \text{ vezes}}}{\overbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}^{n \text{ vezes}}} \\&= \frac{\overbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}^{n \text{ vezes}}}{\overbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}^{n \text{ vezes}}} \\&= \frac{p^n}{q^n}.\end{aligned}$$

Exemplo 7.

$$\begin{aligned}2^1 &= 2, \\2^2 &= 2.2 = 4, \\2^3 &= 2.2.2 = 8, \\2^4 &= 2.2.2.2 = 16, \\(-2)^1 &= -2, \\(-2)^2 &= (-2) \cdot (-2) = 4, \\(-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8, \\(-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16.\end{aligned}$$

Quando o expoente de uma potência de base não nula é par, o resultado da potência é sempre positivo. Se o expoente é ímpar, então o resultado tem o mesmo sinal da base.

Quando a base de uma potência de expoente inteiro positivo é positiva, o resultado é sempre um número positivo. Caso a base seja negativa, então o resultado é positivo se o expoente é par e negativo se o expoente é ímpar.

Exemplo 8. Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} 0^n &= 0; \\ 1^n &= 1; \\ (-1)^n &= \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

2 Propriedades

Esta seção tem como objetivo apresentar algumas propriedades das potências. Antes disso, vejamos os exemplos abaixo para facilitar a compreensão.

Exemplo 9.

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot 5^4 &= (5.5.5).(5.5.5.5) \\ &= 5.5.5.5.5.5.5 \\ &= 5^{3+4}. \end{aligned}$$

Exemplo 10.

$$\begin{aligned} (-9)^5 \div (-9)^2 &= \frac{(-9).(-9).(-9).(-9).(-9)}{(-9).(-9)} \\ &= (-9)^{5-2}. \end{aligned}$$

Exemplo 11.

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{7}{2} \right)^3 \right]^4 &= \left(\frac{7}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2} \right)^3 \\ &= \left(\frac{7}{2} \right)^{3+3+3+3} = \left(\frac{7}{2} \right)^{4 \cdot 3} = \left(\frac{7}{2} \right)^{3 \cdot 4}. \end{aligned}$$

Exemplo 12.

$$(8.5)^3 = (8.5).(8.5).(8.5) = (8.8.8).(5.5.5) = 8^3 \cdot 5^3.$$

Exemplo 13.

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{2} < 1 &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^2 < \frac{1}{2} < 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^3 < \left(\frac{1}{2} \right)^2 < \frac{1}{2} < 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^4 < \left(\frac{1}{2} \right)^3 < \left(\frac{1}{2} \right)^2 < \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Exemplo 14.

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} > 1 &\Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^2 > \frac{5}{2} > 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^3 > \left(\frac{5}{2} \right)^2 > \frac{5}{2} > 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{5}{2} \right)^4 > \left(\frac{5}{2} \right)^3 > \left(\frac{5}{2} \right)^2 > \frac{5}{2} > 1. \end{aligned}$$

As propriedades que foram evidenciadas nos exemplos acima podem ser generalizadas como segue.

Proposição 15. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então

- I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$, se $a \neq 0$ e $m > n$;
- III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- IV. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
- V. $0 < a < 1, m > n \Rightarrow a^m < a^n$;
- VI. $a > 1, m > n \Rightarrow a^m > a^n$.

Exemplo 16.

$$\frac{11}{4} > 2 \Rightarrow \left(\frac{11}{4} \right)^3 = \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} > 2.2.2 = 2^3.$$

Exemplo 17.

$$-3 > -4 \Rightarrow 4 > 3 \Rightarrow (-4)^2 = 4^2 > 3^2 = (-3)^2.$$

Exemplo 18.

$$2 > -1 \Rightarrow 2^5 > 0 > (-1)^5.$$

Mais uma vez, generalizando os exemplos acima obtém-se:

Proposição 19. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então

- I. $a > b \geq 0 \Rightarrow a^m > b^m$;
- II. $0 > a > b \Rightarrow a^m < b^m$, se m é par
- III. $a > b \Rightarrow a^m > b^m$, se m é ímpar.

Exemplo 20. Transforme o produto 8.2^{100} em uma potência de 2.

Solução.

$$8.2^{100} = 2^3 \cdot 2^{100} = 2^{3+100} = 2^{103}.$$

□

Exemplo 21. Qual é a metade de 4^{80} ?

Solução. Observando que

$$4 = 2^2,$$

obtemos

$$4^{80} = (2^2)^{80} = 2^{2 \cdot 80} = 2^{160}.$$

Assim

$$4^{80} \div 2 = 2^{160} \div 2^1 = 2^{160-1} = 2^{159}.$$

□

Exemplo 22. Efetuando as operações indicadas na expressão $\frac{2^{2017} + 2^{2015}}{2^{2016} + 2^{2014}} \cdot 2015$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2^{2017} + 2^{2015}}{2^{2016} + 2^{2014}} \cdot 2015 &= \frac{2^{2015} \cdot (2^2 + 1)}{2^{2014} \cdot (2^2 + 1)} \cdot 2015 \\ &= \frac{2 \cdot 2^{2015}}{2 \cdot 2^{2014}} \cdot 2015 \\ &= 2^{2015-2014} \cdot 2015 \\ &= 2 \cdot 2015 \\ &= 4030. \end{aligned}$$

Exemplo 23. Para saber qual é o maior dentre os números 2^{97} , 4^{48} , 8^{31} , 32^{19} e 128^{14} , a estratégia é transformá-los em potências de 2 e utilizar o item VI da proposição 15. Temos então

$$\begin{aligned} 4^{48} &= (2^2)^{48} = 2^{2 \cdot 48} = 2^{96}, \\ 8^{31} &= (2^3)^{31} = 2^{3 \cdot 31} = 2^{93}, \\ 32^{19} &= (2^5)^{19} = 2^{5 \cdot 19} = 2^{95}, \\ 128^{14} &= (2^7)^{14} = 2^{7 \cdot 14} = 2^{98}. \end{aligned}$$

Como o maior dos expoentes é 98, 128^{14} é o maior dos números.

Exemplo 24. Qual número é maior, 2^{96} ou 3^{64} ?

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 2^{96} &= 2^{3 \cdot 32} = (2^3)^{32} = 8^{32}, \\ 3^{64} &= 3^{2 \cdot 32} = (3^2)^{32} = 9^{32}. \end{aligned}$$

Neste caso, utilizamos a proposição 19 para concluir que $9^{32} > 8^{32}$. Portanto, $3^{64} > 2^{96}$. □

Exemplo 25. Qual número é maior, 31^{11} ou 17^{14} ?

Solução. Fazendo uso das proposições 15 e 19 obtemos

$$\begin{aligned} 31^{11} &< 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{5 \cdot 11} \\ &= 2^{55} < 2^{56} = 2^{4 \cdot 14} \\ &= (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 26. Qual número é maior, $2^{100} + 3^{100}$ ou 4^{100} ?

Solução. Mais uma vez utilizando a proposição 19 obtem-se

$$\begin{aligned} 2^{100} + 3^{100} &< 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100} \\ &= 2 \cdot 3^3 \cdot 3^{97} = 2 \cdot 27 \cdot 3^{97} \\ &= 54 \cdot 3^{97} < 64 \cdot 4^{97} \\ &= 4^3 \cdot 4^{97} = 4^{100}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 27. Ponha os números $a = 2^{60}$, $b = 3^{40}$, $c = 7^{20}$ e $d = 19^{10}$ em ordem crescente.

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} a &= 2^{60} = (2^6)^{10} = 64^{10}, \\ b &= 3^{40} = (3^4)^{10} = 81^{10}, \\ c &= 7^{20} = (7^2)^{10} = 49^{10}, \\ d &= 19^{10}. \end{aligned}$$

Portanto, pela proposição 19, a ordem correta é $d < c < a < b$. □

Exemplo 28. Determine o valor de $\frac{2^n \cdot 10^{n+2}}{5^{n+1} \cdot 4^n}$.

Solução.

$$\begin{aligned} \frac{2^n \cdot 10^{n+2}}{5^{n+1} \cdot 4^n} &= \frac{2^n \cdot (2 \cdot 5)^{n+2}}{5^{n+1} \cdot 4^n} \\ &= \frac{2^n \cdot 2^{n+2} \cdot 5^{n+2}}{5^{n+1} \cdot (2^2)^n} \\ &= \frac{2^n \cdot 2^n \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 5^{n+1}}{5^{n+1} \cdot 2^{2n}} \\ &= \frac{2^{2n} \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 5^{n+1}}{5^{n+1} \cdot 2^{2n}} \\ &= 2^2 \cdot 5 = 20. \end{aligned}$$

□

É conveniente diferenciar potência cuja base é uma potência de potência cujo expoente é uma potência, isto é, em geral temos

$$(a^m)^n \neq a^{m^n}.$$

Exemplo 29. Veja que

$$\begin{aligned} (2^3)^4 &= 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} \text{ e} \\ 2^{3^4} &= 2^{81}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(2^3)^4 \neq 2^{3^4}.$$

Exemplo 30.

$$(3^{2^3})^5 = (3^8)^5 = 3^{8 \cdot 5} = 3^{40}.$$

Exemplo 31.

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^{2^4}} = 2^{2^{16}} = 2^{65536}.$$

Exemplo 32.

$$(2^{2^2})^{2^2} = (2^4)^4 = 2^{4 \cdot 4} = 2^{16}.$$

3 Potências de base 10

Uma situação particular é quando tratamos de **potências de base 10**. Veja que

$$\begin{aligned} 10^1 &= 10, \\ 10^2 &= 100, \\ 10^3 &= 1000, \\ 10^4 &= 10000, \\ 10^5 &= 100000. \end{aligned}$$

Mais geralmente, temos

$$10^n = \underbrace{100 \dots 0}_{n \text{ zeros}}.$$

Exemplo 33. O número $2^{2012} \cdot 5^{2015}$ possui 2015 algarismos, pois

$$\begin{aligned} 2^{2012} \cdot 5^{2015} &= 2^{2012} \cdot 5^{2012} \cdot 5^3 \\ &= (2 \cdot 5)^{2012} \cdot 5^3 \\ &= 5^3 \cdot 10^{2012} \\ &= 125 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{2012 \text{ zeros}} \\ &= 125 \cdot \underbrace{100 \dots 0}_{2012 \text{ zeros}}. \end{aligned}$$

Exemplo 34. Qual é a soma dos algarismos do número $10^{1958} + 10^{1962} + 10^{1970} + 10^{1994} + 10^{2002}$?

Solução. Temos

$$\begin{aligned} 10^{1958} + 10^{1962} + 10^{1970} + 10^{1994} + 10^{2002} &= \\ &= \underbrace{100 \dots 0}_{7 \text{ zeros}} \underbrace{100 \dots 0}_{23 \text{ zeros}} \underbrace{100 \dots 0}_{7 \text{ zeros}} \underbrace{100 \dots 0}_{3 \text{ zeros}} \underbrace{100 \dots 0}_{1958 \text{ zeros}}. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos algarismos do número

$$10^{1958} + 10^{1962} + 10^{1970} + 10^{1994} + 10^{2002}$$

é igual a 5. $\square$

Exemplo 35. Qual é a soma dos algarismos do número $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2014} + 10^{2015}$?

Solução. Temos

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2014} + 10^{2015} = \underbrace{11 \dots 111}_{2016 \text{ algarismos}}.$$

Portanto, a soma dos algarismos de

$$1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2014} + 10^{2015}$$

é 2016. $\square$

Exemplo 36. Qual é o maior dentre os números 2015^5 , 3016^4 , 4017^3 , 5018^2 e 6019^1 ?

Solução. Observe que

$$\begin{aligned} 2015^5 &> 2000^5 = (2 \cdot 10^3)^5 \\ &= 2^5 \cdot (10^3)^5 = 32 \cdot 10^{15} \\ &= 32 \underbrace{00 \dots 0}_{15 \text{ zeros}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3016^4 &< 4000^4 = (4 \cdot 10^3)^4 \\ &= 4^4 \cdot (10^3)^4 = 256 \cdot 10^{12} \\ &= 256 \underbrace{00 \dots 0}_{12 \text{ zeros}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4017^3 &< 5000^3 = (5 \cdot 10^3)^3 \\ &= 5^3 \cdot (10^3)^3 = 125 \cdot 10^9 \\ &= 125 \underbrace{00 \dots 0}_{9 \text{ zeros}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5018^2 &< 6000^2 = (6 \cdot 10^3)^2 \\ &= 6^2 \cdot (10^3)^2 = 36 \cdot 10^6 \\ &= 36000000, \end{aligned}$$

$$6019^1 < 7000.$$

Portanto, fica claro que o maior dos números é 2015^5 , pois possui a maior quantidade de algarismos. $\square$

4 Expoente zero e expoente negativo

Relembremos a seguinte propriedade (cf. proposição 15), válida para $a \in \mathbb{Q}^*$, $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Agora, queremos estender as potências aos expoentes inteiros que não são positivos sem perder a propriedade acima. Então devemos ter

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1;$$

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

Desse modo, podemos definir

$$a^0 = 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplo 37.

$$2^0 = 1;$$

$$15873^0 = 1.$$

Exemplo 38.

$$\left[(10^{2015} + 11^{2014} + 12^{2013})^{2016} \right]^0 = 1.$$

Exemplo 39.

$$\left\{ \left[\left(-\frac{9}{13} \right)^{11} + \left(\frac{19}{17} \right)^{15} \right]^{49} \right\}^0 = 1.$$

Exemplo 40.

$$7^{-3} = \frac{1}{7^3}.$$

Exemplo 41.

$$\left(\frac{3}{8} \right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8} \right)^4} = \left(\frac{8}{3} \right)^4.$$

As propriedades apresentadas na proposição 15 agora são válidas para expoentes inteiros quaisquer.

Proposição 42. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então

- I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- II. $a^m \div a^n = a^{m-n}$, se $a \neq 0$;
- III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- IV. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
- V. $0 < a < 1, m > n \implies a^m < a^n$;
- VI. $a > 1, m > n \implies a^m > a^n$.

Exemplo 43. Escreva

$$\frac{9^{-5} \cdot 81^4 \cdot 3^{-7}}{27^9 \cdot 3^{-11}}$$

como uma única potência.

Solução. Utilizando as propriedades dadas na proposição 15 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{9^{-5} \cdot 81^4 \cdot 3^{-7}}{27^9 \cdot 3^{-11}} &= \frac{(3^2)^{-5} \cdot (3^4)^4 \cdot 3^{-7}}{(3^3)^9 \cdot 3^{-11}} \\ &= \frac{3^{-10} \cdot 3^{16} \cdot 3^{-7}}{3^{27} \cdot 3^{-11}} \\ &= \frac{3^{-10+16-7}}{3^{27-11}} = \frac{3^{-1}}{3^{16}} \\ &= 3^{-1-16} = 3^{-17}. \end{aligned}$$

□

5 Raízes quadradas e cúbicas

A **raiz quadrada** do número racional $a \geq 0$ é o número racional não negativo cujo quadrado é a . Denotamos a raiz quadrada de a por $\sqrt{a}$. Então

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Exemplo 44.

$$\begin{aligned} 0^2 &= 0 \implies \sqrt{0} = 0; \\ 1^2 &= 1 \implies \sqrt{1} = 1; \\ 2^2 &= 4 \implies \sqrt{4} = 2; \\ 3^2 &= 9 \implies \sqrt{9} = 3; \\ 4^2 &= 16 \implies \sqrt{16} = 4; \\ 5^2 &= 25 \implies \sqrt{25} = 5; \\ 6^2 &= 36 \implies \sqrt{36} = 6; \\ 7^2 &= 49 \implies \sqrt{49} = 7; \\ 8^2 &= 64 \implies \sqrt{64} = 8; \\ 9^2 &= 81 \implies \sqrt{81} = 9. \end{aligned}$$

Um número $p \in \mathbb{N}$ é chamado **quadrado perfeito** se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q^2$.

Como vimos no exemplo acima, os números 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 e 81 são os quadrados dos números naturais que possuem apenas um algarismo. Daí segue que um quadrado perfeito sempre tem 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 como algarismo das unidades.

Exemplo 45. Para calcular $\sqrt{196}$, comece observando que $10^2 = 100$ e $20^2 = 400$. Portanto, $\sqrt{196}$ está entre 10 e 20. Como o algarismo das unidades de 196 é 6, temos apenas duas possibilidades para $\sqrt{196}$, que são 14 e 16. Checando essas duas possibilidades obtemos $\sqrt{196} = 14$.

Exemplo 46. Agora o objetivo é determinar $\sqrt{625}$. Desde que $20^2 = 400$ e $30^2 = 900$, temos que $\sqrt{625}$ está entre 20 e 30. Veja que o algarismo das unidades de 625 é 5. Logo, para que 625 seja um quadrado perfeito, a única possibilidade é $\sqrt{625} = 25$. Checando, vemos que de fato $25^2 = 625$.

Exemplo 47.

$$\begin{aligned}
\sqrt{31 + \sqrt{22 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} &= \sqrt{31 + \sqrt{22 + \sqrt{7+2}}} \\
&= \sqrt{31 + \sqrt{22 + \sqrt{9}}} \\
&= \sqrt{31 + \sqrt{22+3}} \\
&= \sqrt{31 + \sqrt{25}} = \sqrt{31+5} \\
&= \sqrt{36} = 6.
\end{aligned}$$

Agora observe exemplos que seguem abaixo.

Exemplo 48.

$$\sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12 = 3 \cdot 4 = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16}.$$

Exemplo 49.

$$(\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125 = \sqrt{15625} = \sqrt{25^3}.$$

Exemplo 50.

$$\sqrt{\frac{49}{100}} = \sqrt{0,49} = 0,7 = \frac{7}{10} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}}.$$

Exemplo 51.

$$49 < 81 \implies \sqrt{49} < \sqrt{81} \implies 7 < 9.$$

Nos exemplos foram evidenciadas propriedades que podem ser generalizados na seguinte proposição:

Proposição 52. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$, com $a \geq 0, b \geq 0$. Então*

- I. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- II. $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$;
- III. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, se $b \neq 0$,
- IV. $a < b \implies \sqrt{a} < \sqrt{b}$

Observe que a raiz quadrada da soma não é igual à soma das raízes quadradas, isto é, em geral vale

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Exemplo 53.

$$\begin{aligned}
\sqrt{9+16} &= \sqrt{25} = 5 \\
\sqrt{9} + \sqrt{16} &= 3+4 = 7.
\end{aligned}$$

A **raiz cúbica** do número racional a é o número racional cujo cubo vale a . A raiz cúbica de a é denotada por $\sqrt[3]{a}$. Então temos

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Exemplo 54.

$$\begin{aligned}
0^3 &= 0 \implies \sqrt[3]{0} = 0; \\
1^3 &= 1 \implies \sqrt[3]{1} = 1; \\
2^3 &= 8 \implies \sqrt[3]{8} = 2; \\
3^3 &= 27 \implies \sqrt[3]{27} = 3; \\
4^3 &= 64 \implies \sqrt[3]{64} = 4; \\
5^3 &= 125 \implies \sqrt[3]{125} = 5; \\
(-1)^3 &= -1 \implies \sqrt[3]{-1} = -1; \\
(-2)^3 &= -8 \implies \sqrt[3]{-8} = -2; \\
(-3)^3 &= -27 \implies \sqrt[3]{-27} = -3; \\
(-4)^3 &= -64 \implies \sqrt[3]{-64} = -4; \\
(-5)^3 &= -125 \implies \sqrt[3]{-125} = -5.
\end{aligned}$$

Um número $p \in \mathbb{N}$ é chamado **cubo perfeito** se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q^3$.

Exemplo 55.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{123 + \sqrt{12 - \sqrt{61 + \sqrt{27}}}} &= \sqrt[3]{123 + \sqrt{12 - \sqrt{61+3}}} \\
&= \sqrt[3]{123 + \sqrt{12 - \sqrt{64}}} \\
&= \sqrt[3]{123 + \sqrt{12-4}} \\
&= \sqrt[3]{123 + \sqrt{8}} = \sqrt[3]{123+2} \\
&= \sqrt[3]{125} = 5.
\end{aligned}$$

As propriedades listadas na proposição 52 se estendem às raízes cúbicas.

Proposição 56. *Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então*

- I. $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$;
- II. $(\sqrt[3]{a})^m = \sqrt[3]{a^m}$;
- III. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, se $b \neq 0$;
- IV. $a < b \implies \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Observe que a raiz cúbica da soma não é igual à soma das raízes cúbicas, isto é, em geral vale

$$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}.$$

Exemplo 57.

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{8+27} &= \sqrt[3]{35}, \\
\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27} &= 2+3 = 5.
\end{aligned}$$

Até o momento, só estudamos potências com expoentes inteiros. Uma pergunta natural a esta altura seria: existem potências com expoentes racionais não inteiros? Abaixo vemos uma resposta parcial para essa pergunta.

Supondo que as propriedades das potências de expoentes inteiros (cf. proposição 15) ainda são válidas, qual seria um possível valor para $a^{\frac{1}{2}}$, em que a é um número racional não negativo? Teríamos

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

Ou seja, o quadrado de $a^{\frac{1}{2}}$ valeria a . Mas o número que tem essa propriedade é a raiz quadrada de a . Assim

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Analogamente, se a é um número racional qualquer,

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{3 \cdot \frac{1}{3}} = a^1 = a.$$

Portanto

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

6 Raízes n -ésimas

Esta seção e a próxima podem ser omitidas numa primeira leitura.

Se $a \geq 0$ é um número racional e n é um inteiro positivo, definimos a **raiz n -ésima de a** como sendo o único racional não negativo cuja n -ésima potência é igual a a . A raiz n -ésima de a é denotada por $\sqrt[n]{a}$. Neste caso,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Exemplo 58.

$$\begin{aligned} 0^n = 0 &\implies \sqrt[n]{0} = 0, \\ 1^n = 1 &\implies \sqrt[n]{1} = 1, \\ 2^4 = 16 &\implies \sqrt[4]{16} = 2, \\ 3^5 = 243 &\implies \sqrt[5]{243} = 3, \\ 4^6 = 4096 &\implies \sqrt[6]{4096} = 4. \end{aligned}$$

Generalizando as definições de quadrado e cubo perfeito dadas na seção 5, dizemos que um número $p \in \mathbb{N}$ é uma **n -ésima potência perfeita** se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $p = q^n$.

Observação 59. Quando n é ímpar, a raiz n -ésima pode ser naturalmente estendida aos números racionais negativos.

Exemplo 60.

$$\begin{aligned} (-1)^9 = -1 &\implies \sqrt[9]{-1} = -1, \\ (-3)^5 = -243 &\implies \sqrt[5]{-243} = -3, \\ (-2)^7 = -128 &\implies \sqrt[7]{-128} = -2, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} &\implies \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Generalizando o que foi feito para raízes quadradas e cúbicas obtemos

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = a^1 = a.$$

Portanto

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

As proposições 52 e 56 podem ser generalizadas na proposição que segue abaixo.

Proposição 61. Sejam $a, b \in \mathbb{Q}$ tais que $a \geq 0, b \geq 0$ e $m, n, d \in \mathbb{N}$. Então

- I. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;
- II. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;
- III. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot d]{a^{m \cdot d}}$;
- IV. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div d]{a^{m \div d}}$, se $d|n$ e $d|m$;
- V. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, se $b \neq 0$;
- VI. $a < b \implies \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$;
- VII. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

Para raízes n -ésimas também vale

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}.$$

7 Potência de expoente racional

Como poderíamos definir $a^{\frac{m}{n}}$, onde a é um número racional positivo e $\frac{m}{n}$ é uma fração com $m > 0$ e $n > 0$? Supondo que as propriedades das potências de expoentes inteiros (cf. proposição 15) continuam válidas, podemos escrever

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Sob as mesmas hipóteses, veja que

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = 1.$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

De fato, mais uma vez, todas as propriedades apresentadas na proposição 15 continuam válidas.

Proposição 62. *Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{Q}$, tais que $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Então*

- I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- II. $a^x \div a^y = a^{m-n}$, se $a \neq 0$;
- III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
- IV. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
- V. $0 < a < 1, x > y \implies a^x < a^y$;
- VI. $a > 1, x > y \implies a^x > a^y$.

Exemplo 63.

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{0,00032} &= (0,00032)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{32}{100000}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{32^{\frac{1}{5}}}{100000^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{100000}} = \frac{2}{10} = 0,2. \end{aligned}$$

Exemplo 64.

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Exemplo 65.

$$6^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{6^7} = \sqrt[4]{6^4 \cdot 6^3} = \sqrt[4]{6^4} \cdot \sqrt[4]{6^3} = 6 \sqrt[4]{216}.$$

Exemplo 66.

$$\begin{aligned} 5^{-\frac{8}{3}} &= \frac{1}{5^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^3 \cdot 5^3 \cdot 5^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{25}} = \frac{1}{25 \sqrt[3]{25}}. \end{aligned}$$

Exemplo 67.

$$\begin{aligned} \frac{5 \sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{500}} &= \frac{5 \sqrt[3]{\sqrt{49}}}{\sqrt[3]{125 \cdot 4}} = \frac{5 \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5^3 \cdot 4}} \\ &= \frac{5 \sqrt[3]{7}}{5 \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{7}{4}}. \end{aligned}$$

Exemplo 68.

$$\sqrt[9]{27^{36}} = 27^{\frac{36}{9}} = 27^4 = (3^3)^4 = 3^{3 \cdot 4} = 3^{12}.$$

Dicas para o Professor

Reserve duas sessões de 50min para a segunda seção e uma sessão de 50min para cada uma das outras seções. Na segunda seção, enfatize as propriedades listadas nas proposições 15 e 19, invocando sua utilização, sempre que necessário, nas soluções dos exemplos. Outro ponto que deve ser observado é que as propriedades contidas na proposição 15 se estendem naturalmente quando passamos a expoentes inteiros ou racionais. Finalmente, na quinta seção, chame a atenção dos alunos para as propriedades das raízes quadradas que aparecem na proposição 52, bem como sua generalização para raízes cúbicas e, mais geralmente, para raízes de índice n .