

**Material Teórico - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de  
Cilindros, Cones e Esferas**

**Cone**

**Terceiro Ano - Médio**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



Uma taça, a ponta de um lápis, uma casquinha de sorvete, todos têm o formato de um sólido familiar, que chamamos de *cone*. Um feixe de luz que sai de uma lanterna, de um farol ou de um holofote, também tem formato cônico. Nesta aula, vamos estudar essa importante figura geométrica.

## 1 Definição de cone

Assim como na aula sobre cilindros, usaremos a palavra *círculo* para designar uma *curva plana* formada por todos os pontos situados a uma distância dada de um ponto dado, e usaremos a palavra *disco*, para designar a *região* do plano delimitada por um círculo, incluindo o próprio círculo.

Mais precisamente, o círculo  $C$  de centro  $O$  e raio  $r > 0$  é o conjunto formado por todos os pontos do plano que estão à distância  $r$  do ponto  $O$ , enquanto o disco  $D$  de centro  $O$  e raio  $r > 0$  é o conjunto formado por todos os pontos do plano que estão a uma distância menor ou igual a  $r$  do ponto  $O$ .

Os pontos que pertencem a um disco mas não pertencem ao círculo que o delimita formam o *interior* do disco. Assim, o interior do disco é formado pelos pontos cuja distância até o ponto  $O$  é *estritamente menor* que  $r$ . Feitas essas observações, passemos à definição de cone e de superfície cônica limitada.

Seja  $V$  um ponto fora do plano  $\alpha$  que contém o disco  $D$  (veja a figura 1). Chamamos de **cone circular** de **base  $D$**  e **vértice  $V$**  o sólido formado por todos os pontos do espaço que pertencem a algum segmento de reta  $AV$ , onde  $A$  é um ponto do disco  $D$ .

Por outro lado, se  $C$  é o círculo que delimita  $D$ , então o conjunto dos pontos que pertencem a um segmento  $AV$ , com  $A$  pertencente a  $C$ , é chamado **superfície cônica circular limitada** de base  $C$  e vértice  $V$ .

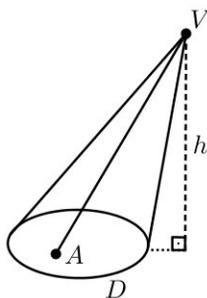


Figura 1: cone sólido de base  $D$  e vértice  $V$ .

Nesta aula, consideraremos apenas cones circulares, razão pela qual usaremos o nome *cone* para indicar um cone sólido circular e *superfície cônica* para indicar uma superfície cônica circular.

A distância  $h$  entre o vértice  $V$  do cone e o plano  $\alpha$  que contém sua base  $D$  é chamada de **altura** do cone (veja novamente a figura 1).

Se  $A$  é um ponto pertencente ao círculo  $C$  da base do cone, então o segmento  $AV$  é dito uma **geratriz** do cone. Na figura 2 a geratriz  $AV$  aparece na cor verde.

Note que, se o ponto  $A$  percorre o círculo  $C$ , então a geratriz  $AV$  pode, em geral, aumentar ou diminuir de tamanho. Como veremos mais adiante, isso só não ocorre se a reta  $\overleftrightarrow{VO}$  for perpendicular ao plano que contém  $C$ .

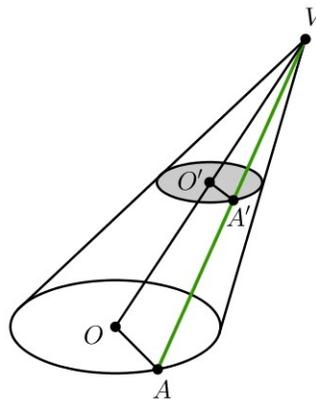


Figura 2: uma seção paralela à base do cone é um disco.

Para continuar nosso estudo, precisaremos da seguinte

**Afirmção 1.** *Se seccionarmos um cone por um plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$  que contém sua base, obteremos um disco.*

Para justificarmos a afirmação acima, consideremos a curva  $C'$  de interseção do plano  $\beta$  com a superfície cônica. Se  $O$  é o centro da base do cone, sejam  $A'$  a interseção da geratriz  $AV$  com  $C'$  e  $O'$  a interseção de  $OV$  com o plano  $\beta$  (figura 2).

Os pontos  $O'$  e  $A'$  estão no plano determinado por  $O$ ,  $A$  e  $V$ . Como a reta determinada por  $O'$  e  $A'$  está contida no plano  $\beta$ , que é paralelo ao plano  $\alpha$  que contém a base do cone, temos que  $O'A'$  é paralelo a  $OA$ . Consequentemente, os triângulos  $O'A'V$  e  $OAV$  são semelhantes, o que nos dá a igualdade

$$\frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{O'V}}{\overline{OV}}.$$

Por outro lado, se  $B'$  é outro ponto qualquer de  $C'$ , então o mesmo argumento acima se aplica e nos dá

$$\frac{\overline{O'B'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O'V}}{\overline{OV}},$$

onde  $B$  é a interseção de  $\overleftrightarrow{VB'}$  com  $\alpha$ .

Comparando as duas igualdades anteriores, obtemos que

$$\frac{\overline{O'B'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}}.$$

Então, como  $\overline{OB} = \overline{OA}$  (pois  $A, B \in C$  e  $C$  é um círculo), concluímos que  $\overline{O'B'} = \overline{O'A'}$ . Isso mostra que quaisquer dois pontos de  $C'$  são equidistantes de  $O'$ , ou seja, que  $C'$  é um círculo de centro  $O'$ .

De posse da afirmação anterior, se a reta  $\overleftrightarrow{OV}$  determinada pelo vértice  $V$  do cone e pelo centro  $O$  de sua base for perpendicular ao plano  $\alpha$  que contém a base do cone, diremos que o cone é **reto**. Caso contrário, diremos que o cone é **oblíquo**.

Cones retos têm propriedades interessantes. A primeira delas é que, conforme mencionamos anteriormente, *todas as suas geratrizes têm um mesmo comprimento*. Isso porque (veja a figura 3) cada geratriz é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos têm comprimentos fixos:  $r$  (raio da base do cone) e  $h$  (altura do cone).

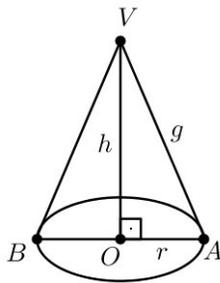


Figura 3: calculando as geratrizes de um cone reto.

Assim, o Teorema de Pitágoras fornece a seguinte relação entre o comprimento  $r$  do raio da base, a altura  $h$  e o comprimento  $g$  da geratriz de um cone reto:

$$r^2 + h^2 = g^2 \quad (1)$$

Outra propriedade importante de um cone (circular) reto e que ele *pode ser obtido a partir da revolução de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos*. Por exemplo, em relação ao cone reto da figura 3, isso significa que ele pode ser obtido fazendo-se o triângulo  $AOV$  dar uma volta completa em torno do cateto  $OV$ . Evidentemente, a revolução desse mesmo triângulo em torno do cateto  $OA$ , isto é, o giro de  $360^\circ$  em torno desse outro cateto, gerará outro cone.

Para um cone geral (isto é, não necessariamente reto), sua interseção com um plano que contém o vértice e o centro da base é chamada uma **seção meridiana** do cone. Na figura 3, o triângulo  $VAB$  é uma seção meridiana do cone reto em questão. Por sua vez, este conceito nos leva a outra afirmação importante acerca de cones retos.

**Afirmação 2.** *Um cone é reto se, e somente se, todas as suas seções meridianas são congruentes a um mesmo triângulo isósceles.*

De fato, se o cone é reto, vimos em (1) que todas as suas geratrizes têm um mesmo comprimento  $g$ ; portanto, uma seção meridiana será sempre um triângulo isósceles, com dois lados iguais a  $g$ .

Reciprocamente, suponha que a seção meridiana é sempre um triângulo isósceles. Se  $VAB$  é um desses triângulos, então os triângulos  $VAO$  e  $VBO$  são congruentes por LLL, de forma que  $\widehat{VOA} = \widehat{VOB} = 90^\circ$ . Então,  $VO \perp AB$  para todo diâmetro  $AB$  da base do cone, de forma que  $\overleftrightarrow{VO}$  é perpendicular ao plano que contém a base do cone (isto é, o cone é reto).

Um caso particular importante de cone reto é aquele em que a seção meridiana é um triângulo *equilátero*. Nesta situação, dizemos que o cone é **equilátero**. Pela Afirmação 2, todo cone equilátero é necessariamente um cone reto. Além disso, se um cone é equilátero, então suas geratrizes têm medida  $g$  igual à medida do diâmetro da base, ou seja,

$$g = 2r. \quad (2)$$

Para cones retos em geral, o **ângulo de abertura** é a medida  $\theta$  do ângulo entre sua altura e uma de suas geratrizes (veja a figura 4).

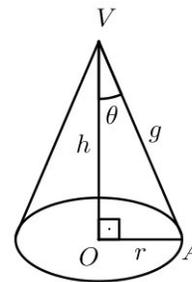


Figura 4: ângulo de abertura de um cone reto.

Uma vez que  $\widehat{VOA} = 90^\circ$ , vemos que o ângulo  $\theta$  de abertura de um cone reto satisfaz  $0 < \theta < 90^\circ$ . Além disso, temos as seguintes relações, as quais seguem imediatamente do triângulo  $VOA$  da figura acima:

$$\cos \theta = \frac{h}{g}, \quad \text{sen } \theta = \frac{r}{g} \quad \text{e} \quad \text{tg } \theta = \frac{r}{h}.$$

Em particular, o cone reto é equilátero se, e somente se,

$$\text{sen } \theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2},$$

isto é, se, e somente se,  $\theta = 30^\circ$ .

**Exemplo 3.** Dois cones retos com mesmo raio da base e ângulo de abertura  $\theta = 45^\circ$  têm suas bases coladas uma na outra, conforme mostrado na figura 5. Mostre que o sólido obtido dessa forma é exatamente o mesmo que se obtém quando se faz a revolução de um quadrado em torno de uma de suas diagonais.

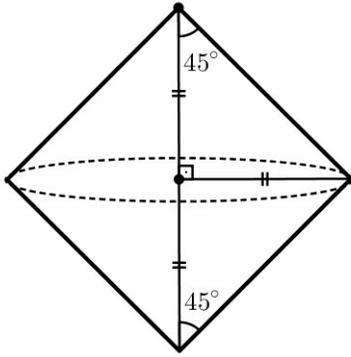


Figura 5: revolução de um quadrado em torno de uma diagonal.

**Prova.** No caso descrito, e sendo  $r$  o raio da base e  $h$  a altura do cone, temos

$$\frac{r}{h} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Então,  $h = r$  e segue de (1) que  $g = r\sqrt{2}$ . Portanto, a união das seções meridianas dos dois cones por um mesmo plano (conforme mostrado na figura 5) é um losango de diagonais iguais, logo, um quadrado.  $\square$

## 2 Área da superfície de um cone reto

Nesta seção, calcularemos a área da superfície de um cone reto. Essa área é a soma da área da base do cone com a área da superfície lateral (a superfície cônica correspondente ao cone sólido). A área da base do cone é a área de um círculo:  $\pi r^2$ , onde  $r$  é o raio da base do cone. Assim, a dificuldade aqui está em calcular a área lateral do cone.

Como estamos considerando um cone reto, pelo que já vimos na seção anterior, as geratrizes desse cone têm todas um mesmo comprimento  $g$ . Assim, se *planificarmos* sua superfície lateral (cortando o cone ao longo de uma geratriz e, em seguida, *abrindo-o* – pense nesse processo executado num chapéu de aniversário), obteremos um *setor circular* de raio  $g$  e vértice  $V$  (veja a figura 6 – onde  $V$  não aparece nomeado, por simplicidade). Observe que o arco do setor tem comprimento  $2\pi r$  porque ele é originado a partir do círculo de raio  $r$  que forma a base do cone, e  $2\pi r$  é o comprimento de tal círculo.

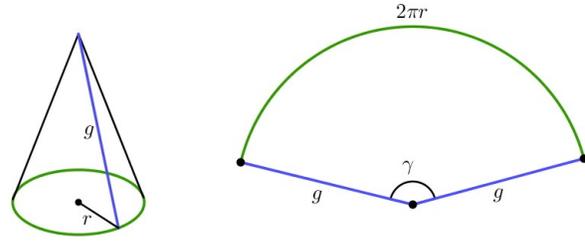


Figura 6: planificando a superfície lateral de um cone.

Então, calcular a área lateral  $A_L$  do cone é o mesmo que calcular a área desse setor. Por sua vez, para fazê-lo, precisamos descobrir seu ângulo de abertura  $\gamma$  (veja a figura acima, à direita). Para isso, observamos que um ângulo de uma volta completa ( $2\pi$  radianos) corresponde ao comprimento inteiro do círculo de raio  $g$  ( $2\pi g$ ), assim como o ângulo  $\gamma$  corresponde ao comprimento  $2\pi r$  do arco do setor de abertura  $\gamma$  e raio  $g$ . Assim, uma regra de três simples nos dá

$$\frac{2\pi}{2\pi g} = \frac{\gamma}{2\pi r},$$

de sorte que  $\gamma = \frac{2\pi r}{g}$ .

Continuando, observamos agora que o ângulo uma volta completa ( $2\pi$  radianos) corresponde à área inteira do círculo de raio  $g$  ( $\pi g^2$ ), enquanto o ângulo  $\gamma = \frac{2\pi r}{g}$  corresponde à área lateral  $A_L$ . Portanto, uma nova regra de três simples fornece

$$\frac{A_L}{\gamma} = \frac{\pi g^2}{2\pi},$$

ou seja,

$$A_L = \frac{g^2}{2} \cdot \gamma = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{2\pi r}{g} = \pi r g.$$

Concluimos que a área total  $A_T$  da superfície de um cilindro reto com raio da base  $r$  e geratriz  $g$  é igual à soma da área  $A_B = \pi r^2$  da base com a área lateral  $A_L = \pi r g$ :

$$A_T = \pi r(r + g). \quad (3)$$

Caso sejam conhecidos o raio  $r$  da base e a altura  $h$  de um cone reto, a relação (1) garante que a área total de sua superfície vale

$$A_T = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

**Exemplo 4.** Se  $\theta$  é o ângulo de abertura de um cone reto e  $\gamma$  é o ângulo de abertura do setor obtido planificando-se sua superfície lateral, mostre que

$$\gamma = 2\pi \operatorname{sen} \theta.$$

**Prova.** Nas notações da discussão anterior e observando novamente a figura 4, temos  $\gamma = \frac{2\pi r}{g}$  e  $\frac{r}{g} = \sin \theta$ . Então,

$$\gamma = 2\pi \cdot \frac{r}{g} = 2\pi \sin \theta.$$

□

Como caso particular do exemplo anterior, vimos que o cone reto é equilátero se, e somente se,  $\theta = 30^\circ$ , ou seja, se, e somente se,  $\gamma = 2\pi \sin \theta = \pi$ . Isso significa que o planificação da superfície lateral de um cone reto é um semicírculo se, e somente se, o cone é equilátero.

**Exemplo 5.** Uma formiga caminha ao longo de um cone (circular) reto com raio da base  $r$  e geratriz  $g$ . Ela sai de um ponto  $A$  do círculo  $C$  da base do cone e vai até o ponto  $B$ , também no círculo da base mas diametralmente oposto a  $A$ . Ao fazê-lo, ela percorre um caminho sobre a superfície do cone que tem o menor comprimento possível. Calcule esse comprimento.

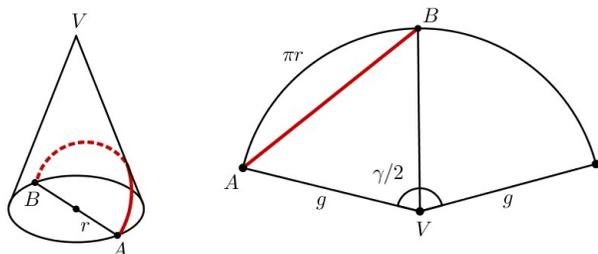


Figura 7: o caminho mínimo sobre a superfície do cone e ligando  $A$  e  $B$ , e sua planificação.

**Solução.** Para que o caminho tenha comprimento mínimo, o caminho correspondente na planificação do cone (em vermelho, na figura 7) também deve ter comprimento mínimo. Isso significa que, na planificação (e como mostrado na figura), esse caminho deve ser um segmento de reta.

Queremos, assim, calcular  $\overline{AB}$  (na figura 7, à direita), o que pode ser feito usando-se a lei dos cossenos no triângulo  $ABV$ . Para tal, observamos que, como  $AB$  é um diâmetro da base antes da planificação, após a planificação temos  $\widehat{AVB} = \frac{\gamma}{2}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AV}^2 + \overline{BV}^2 - 2\overline{AV} \cdot \overline{BV} \cdot \cos \widehat{AVB} \\ &= g^2 + g^2 - 2g \cdot g \cdot \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Mas, como  $\gamma = \frac{2\pi r}{g}$  (veja a discussão que levou a (3), se necessário), temos que  $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi r}{g}$  e, daí,

$$\overline{AB}^2 = 2g^2 - 2g^2 \cdot \cos \left( \frac{\pi r}{g} \right),$$

ou seja,

$$\overline{AB} = g\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \left( \frac{\pi r}{g} \right)}. \quad (4)$$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, se o cone é equilátero, temos  $g = 2r$ . Logo,  $\frac{\pi r}{g} = \frac{\pi}{2}$  e  $\overline{AB} = g\sqrt{2}$ , uma vez que  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

### 3 Volume do cone

Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que o volume de um cone (circular) é igual a um terço da área de sua base multiplicada por sua altura. Essa é a mesma expressão do volume de uma pirâmide. Demonstraremos que vale essa igualdade usando o *princípio da exaustão*, que já foi usado em outras aulas (veja, por exemplo, a aula sobre cilindros).

Seja  $K$  um cone circular, de vértice  $V$  e altura  $h$ , cuja base é um disco  $D$  de raio  $r > 0$ .

Para cada natural  $n \geq 3$ , sejam  $q_n$  e  $Q_n$  polígonos regulares de  $n$  lados, sendo que  $q_n$  está inscrito em  $D$  e  $Q_n$  está circunscrito a  $D$ .

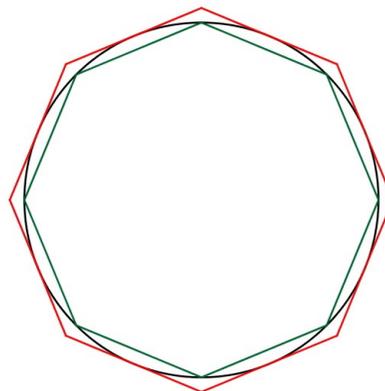


Figura 8: polígonos  $q_n$  e  $Q_n$ , respectivamente inscrito e circunscrito à base do cone.

Consideremos duas pirâmides  $p_n$  e  $P_n$ , ambas de vértice  $V$  e cujas bases são, respectivamente, os polígonos  $q_n$  e  $Q_n$ . Então,  $p_n$  e  $P_n$  têm altura  $h$ , de sorte que seus volumes são dados por

$$\text{vol}(p_n) = \frac{h}{3} \cdot \text{area}(q_n) \quad \text{e} \quad \text{vol}(P_n) = \frac{h}{3} \cdot \text{area}(Q_n).$$

Por outro lado, por construção, temos  $p_n \subset K \subset P_n$ . Daí,

$$\text{vol}(p_n) < \text{vol}(K) < \text{vol}(P_n), \quad (5)$$

para cada  $n \geq 3$ .

Agora, uma vez que  $q_n \subset D \subset Q_n$ , temos uma desigualdade similar para as áreas de  $q_n$ ,  $D$  e  $Q_n$ :

$$\text{area}(q_n) < \text{area}(D) < \text{area}(Q_n).$$

Multiplicando as desigualdades acima por  $h/3$ , obtemos

$$\frac{h}{3} \cdot \text{area}(q_n) < \frac{h}{3} \text{area}(D) < \frac{h}{3} \text{area}(Q_n),$$

ou seja, para cada natural  $n \geq 3$ ,

$$\text{vol}(p_n) < \frac{h}{3} \text{area}(D) < \text{vol}(P_n). \quad (6)$$

Neste ponto, vamos assumir a validade do seguinte fato geométrico, intuitivamente plausível: *é possível considerar  $n$  suficientemente grande de modo que os volumes de  $p_n$  e  $P_n$  estejam arbitrariamente próximos.* De outro modo, para cada erro  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $n$ , suficientemente grande, tal que

$$|\text{vol}(P_n) - \text{vol}(p_n)| < \varepsilon.$$

Por outro lado, das desigualdades (5) e (6) segue que, para cada  $n \geq 3$ ,

$$|\text{vol}(K) - \frac{h}{3} \text{area}(D)| < |\text{vol}(P_n) - \text{vol}(p_n)|. \quad (7)$$

Se  $\text{vol}(K)$  fosse diferente de  $\frac{h}{3} \text{area}(D)$ , poderíamos tomar o erro  $\varepsilon$  como sendo  $\varepsilon = |\text{vol}(K) - \frac{h}{3} \text{area}(D)| > 0$ . Então, para um natural  $n$  suficientemente grande, teríamos

$$|\text{vol}(P_n) - \text{vol}(p_n)| < \varepsilon = |\text{vol}(K) - \frac{h}{3} \text{area}(D)|. \quad (8)$$

Uma vez que a desigualdade (8) contradiz a desigualdade (7), concluímos que  $\text{vol}(K)$  não pode ser diferente de  $\frac{h}{3} \text{area}(D)$ . Assim,

$$\text{vol}(K) = \frac{h}{3} \text{area}(D). \quad (9)$$

**Exemplo 6.** Calcule o volume de um cone reto equilátero, cujo raio da base mede  $r$ .

**Solução.** Sendo  $g$  e  $h$  os comprimentos da geratriz e da altura do cone, sabemos que  $g = 2r$  e, por (1), que

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}.$$

Portanto, (9) nos dá

$$\text{vol} = \frac{h}{3} \cdot \text{area}(D) = \frac{r\sqrt{3}}{3} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}.$$

□

## Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Os exemplos exibidos podem ser explorados em casos particulares. Você pode atribuir valores para raio, altura ou geratriz de um cone reto, ou ainda para o ângulo de abertura do cone, para obter exemplos com resultados numéricos.

Mais uma vez, você terá a oportunidade de usar o princípio da exaustão para demonstrar a validade da fórmula que dá o volume de um sólido. Tal princípio, cuja criação é atribuída ao matemático grego Eudoxo de Cnido, um contemporâneo de Platão e Aristóteles, foi intensamente usado por Arquimedes de Siracusa na resolução de problemas envolvendo o cálculo de volumes de sólidos. O raciocínio que exibimos aqui para demonstrar que o volume de um cone é um terço da área da base multiplicada pela sua altura, é essencialmente o mesmo de Arquimedes. Uma outra alternativa para a demonstração desse resultado é o uso do princípio de Cavalieri.

As referências a seguir contêm vários exercícios sobre cones, com diferentes graus de dificuldade.

## Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*, Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
3. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 10, sétima edição, São Paulo, 2013.