

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Demonstração - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de Abril de 2025



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Enunciaremos mais uma vez a regra da cadeia e apresentaremos uma demonstração desse resultado. Vários exemplos e aplicações serão discutidos.

1 Introdução

Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função qualquer, $a \in I$ e $\phi : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ a *função quociente de Newton* de f em a , ou seja, tal que

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$. Veja que, também para todos esses valores de x , temos

$$f(x) = f(a) + \phi(x)(x - a).$$

Observe que, *em princípio, essa igualdade não tem sentido quando $x = a$* . Isso pode parecer um contrassenso, uma vez que, quando $x = a$, o primeiro membro torna-se $f(a)$ e $x - a$ torna-se 0. O problema, contudo, é que a função ϕ não está definida em a , de forma que não é possível fazer $x = a$ na igualdade acima.

Para remediar essa situação, suponha que f seja derivável em a . Então,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x);$$

estendendo a definição de ϕ ao ponto a pondo $\phi(a) = f'(a)$, obtemos uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x). \quad (1)$$

Portanto, a função estendida $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ será contínua em a .

Reciprocamente, suponhamos que o valor $\phi(a)$ esteja definido de modo a tornar $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em a . Então, a igualdade (1) é válida, de forma que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe e é igual a $\phi(a)$. Portanto, f é derivável em a (e $f'(a) = \phi(a)$).

Acabamos de demonstrar a

Proposição 1. *Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ será derivável no ponto $a \in I$ se, e somente se, existir uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em a , tal que*

$$f(x) = f(a) + \phi(x)(x - a) \quad (2)$$

para todo $x \in I$. Em caso afirmativo, valerá $f'(a) = \phi(a)$.

Observação 2. *Nas notações acima, se f for derivável em a , então $\phi(x) \approx \phi(a) = f'(a)$ para $x \approx a$. Daí, a relação (2) implica*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

se $x \approx a$, como já comentamos na aula Definição e Exemplos, do módulo Definição de Derivada (confira a relação (5) de lá e a discussão que segue).

A proposição 3 contém uma formulação exata desses fatos.

O interessante a respeito da aproximação expressa na observação anterior é que, supondo f derivável em a , o erro

$$r(x) := f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a)) \quad (3)$$

torna-se “desprezível” relativamente ao incremento $x - a$ quando $x \neq a$ estiver suficientemente próximo de a ; mais precisamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a} = 0. \quad (4)$$

Realmente, pela proposição 1,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (\phi(x) - f'(a)) = \phi(a) - f'(a) = 0.$$

Costumamos exprimir em palavras a relação (4) dizendo que “no ponto a , o erro $r(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a 1 em relação ao incremento $x - a$ ”.

Mais geralmente, se g e h forem funções reais definidas numa vizinhança do ponto a , com $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ mas $h(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ suficientemente próximo de a , a sentença “ $g(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a 1 em relação a $h(x)$ no ponto a ” significa que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Para referências futuras, reescreveremos a proposição 1 em termos da função erro r .

Proposição 3. *Sejam $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in I$. Se f for derivável no ponto a , então a função erro (ou resto) $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por (3), cumprirá a condição (4).*

Reciprocamente, suponha que exista um número real α tal que, pondo

$$\tilde{r}(x) := f(x) - (f(a) + \alpha(x - a))$$

para $x \in I$, valha $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{r}(x)/(x - a) = 0$. Então, f será derivável em a , com $f'(a) = \alpha$.

Prova. Já demonstramos a primeira parte. Para a segunda, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, pondo $\tilde{r}$ como no enunciado, valha $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{r}(x)/(x - a) = 0$. Então, para $x \neq a$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tilde{r}(x)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + \alpha(x - a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha$, de forma que f é derivável em a , com $f'(a) = \alpha$. $\square$

Podemos resumir a proposição 3 dizendo que *uma função f será derivável num ponto a de seu domínio se, e somente*

se, existir uma função afim m tal que a diferença $f(x) - m(x)$ seja um infinitésimo de ordem superior a 1 em relação ao incremento $x - a$ no ponto a . Em caso afirmativo, teremos $m(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ ¹ (e $f - m = r$).

2 Uma prova da regra da cadeia

Para conveniência do leitor, transcrevemos abaixo o teorema 1 da 1ª aula desse módulo, fornecendo a regra para o cálculo da derivada da composição de duas funções.

Teorema 4 (Regra da Cadeia). *Sejam $g : J \rightarrow I$ uma função derivável em $x_0 \in J$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $g(x_0)$. Então, a composição $f \circ g$ é derivável em x_0 e sua derivada nesse ponto é igual $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$, o produto das derivadas de f e g nos pontos correspondentes. Assim,*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad (5)$$

Prova. Utilizando a Proposição (1) para a função g e o ponto x_0 , bem como para a função f e o ponto $y_0 := g(x_0)$, temos

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\theta(x) \quad (6)$$

e

$$f(y) = f(y_0) + (y - y_0)\phi(y) \quad (7)$$

para todo $x \in J$, $y \in I$, sendo $\theta : J \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em x_0 e $g(x_0)$, respectivamente, com $\theta(x_0) = g'(x_0)$ e $\phi(y_0) = f'(y_0)$.

Tomando $y = g(x)$ em (7) e utilizando (6) a fim de obter o valor de $g(x) - g(x_0)$, vem que

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\phi(g(x)) \\ &= f(g(x_0)) + (x - x_0)[\phi(g(x)) \cdot \theta(x)] \\ &= f(g(x_0)) + (x - x_0)\psi(x), \end{aligned}$$

¹O gráfico da função afim m é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

sendo $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\psi(x) = \phi(g(x)) \cdot \theta(x)$.

Afirmamos que ψ é contínua no ponto x_0 . Com efeito, g é contínua em x_0 e ϕ é contínua em $g(x_0)$. Logo, a composição $x \mapsto \phi(g(x))$ é contínua em x_0 e, agora, a afirmação segue do fato de que o produto de funções contínuas no ponto x_0 (a saber, $\phi \circ g$ e θ) ainda é uma função contínua em x_0 .

Por fim, uma vez que ψ é contínua no ponto x_0 , a igualdade obtida acima para $f(g(x))$, juntamente com o resultado da Proposição (1), garantem que $f \circ g$ é derivável em x_0 , valendo

$$(f \circ g)'(x_0) = \psi(x_0) = \phi(g(x_0)) \cdot \theta(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

□

3 Algumas aplicações

A próxima proposição estende a regra $\frac{d(x^k)}{dx} = kx^{k-1}$ à expoentes reais k arbitrários.

Proposição 5. *Sejam k um número real e $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = x^k$. Então, F é suave e $F'(x) = kx^{k-1}$ para todo $x > 0$.*

Prova. Se $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $h(x) = k \ln x$, então

$$F(x) = e^{\ln x^k} = e^{k \ln x} = \exp(h(x)),$$

ou seja, $F = \exp \circ h$. Como $\exp$ e h são funções suaves, a proposição 6 da aula *Regra da Cadeia - Exercícios - Parte II* garante a suavidade de F . Além disso, pela regra da cadeia, $F' = (\exp' \circ h) \cdot h' = F \cdot h'$, ou seja,

$$F'(x) = x^k \cdot \frac{k}{x} = kx^{k-1}.$$

□

De maneira análoga à demonstração da proposição acima, se $f : I \rightarrow (0, +\infty)$ for uma função derivável e k for um

número real², então a função $I \ni x \mapsto f(x)^k$ é derivável, valendo

$$\frac{d(f(x)^k)}{dx} = k f(x)^{k-1} f'(x). \quad (8)$$

Em verdade, temos o seguinte resultado mais geral.

Proposição 6. *Sejam $f : I \rightarrow (0, +\infty)$ e $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis (resp. suaves). Então, $F : I \rightarrow (0, +\infty)$, definida por $F(x) = f(x)^{g(x)}$, é n vezes derivável (resp. suave).*

Prova. Basta argumentar como na prova da proposição 5, notando que $F = \exp \circ h$, em que $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = g(x) \ln f(x)$, é n vezes derivável (resp. suave). $\square$

Para derivar uma função do tipo da proposição anterior, escrevemos $\ln F(x) = g(x) \ln f(x)$ e derivamos membro a membro, com auxílio da regra da cadeia:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}.$$

Assim, $F'(x) = F(x) g'(x) \ln f(x) + F(x) \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}$, de forma que, substituindo o valor de $F(x)$, chegamos à fórmula

$$\frac{d(f(x)^{g(x)})}{dx} = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x).$$

Embora não seja necessário memorizar a fórmula acima, vale observar que a primeira parcela no 2º membro é a derivada da função “exponencial” $x \mapsto f(x)^{g(x)}$, quando consideramos $f(x)$ como uma constante, ao passo que a segunda parcela é a derivada da função “monômio” $x \mapsto f(x)^{g(x)}$, ao encarmos $g(x)$ como uma constante.

No Teorema 6 da aula *Reta Tangente - Parte 1*, do módulo *Definição de Derivada*, vimos que, se I, J forem intervalos e $f : I \rightarrow J$ for uma bijeção derivável, então a inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ será derivável em um ponto $b = f(a)$ se, e

²Compare com a proposição 5 da 1ª aula desse módulo.

somente se, $f'(a) \neq 0$; vimos também que, nesse caso, vale $(f^{-1})'(b) = 1/f'(a)$.

Em particular, se $f'(a) \neq 0$ para todo $a \in I$, então f^{-1} é derivável e

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \quad (9)$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(x)$, então $x = f^{-1}(y)$ e

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=b} = \frac{1}{\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}}$$

(nas hipóteses acima sobre a e b). Assim, se f' for diferente de zero em cada ponto de I , a relação entre as primeiras derivadas de f e de sua inversa pode ser escrita na forma³

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \quad (10)$$

Proposição 7. *Suponha que $f : I \rightarrow J$ seja uma bijeção n vezes derivável (resp. suave), com derivada não nula em cada ponto. Então, sua inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$ também é n vezes derivável (resp. suave).*

Prova. Argumentaremos por indução em n . Para $n = 1$, o resultado segue dos comentários acima. Se a proposição for válida para um certo natural n , seja $f : I \rightarrow J$ uma bijeção $n + 1$ vezes derivável com derivada não nula em cada ponto de I . Pela hipótese de indução, sabemos que f^{-1} é n vezes derivável. O mesmo se pode dizer de f' , devido à ordem de diferenciabilidade de f . Daí, a proposição 6 da 2ª parte da aula anterior garante que $f' \circ f^{-1}$ também é n vezes derivável. Logo, a hipótese sobre f' (de não anulamento) permite afirmar que $(f^{-1})' = 1/(f' \circ f^{-1})$ é n vezes derivável, ou seja, que f^{-1} é $n + 1$ vezes derivável. $\square$

Uma bijeção derivável com inversa derivável chama-se um *difeomorfismo*.

³Para a fórmula a seguir, valem as mesmas observações feitas na 1ª aula desse módulo sobre a regra da cadeia escrita na notação de Leibniz.

Por exemplo, $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ e $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ são difeomorfismos, uma vez que são bijeções e suas funções inversas, $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ também são deriváveis. (Realmente, a derivabilidade das inversas de $\exp$ e tg segue, conforme observamos anteriormente, de que $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ para todo $x > 0$ e $\operatorname{tg}'(x) = \sec^2(x) \neq 0$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

Por outro lado, a função cúbica $x \mapsto x^3$ é um exemplo de *homeomorfismo* (uma bijeção contínua com inversa contínua⁴) suave que não é um difeomorfismo, pois sua inversa $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ não é derivável em 0 ⁵.

Com essa terminologia, a proposição anterior enuncia que todo difeomorfismo n vezes derivável (resp. suave) tem inversa n vezes derivável (resp. suave).

4 Exemplos

Nesta seção, discutimos alguns exemplos mais difíceis.

Exemplo 8. Prove que $\cos^k \theta < \cos(k\theta)$ para $0 < \theta < \pi/2$ e $0 < k < 1$.

Solução. Definindo $f : [0, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ pela regra

$$f(\theta) = \cos(k\theta) - \cos^k \theta,$$

as considerações da seção anterior permitem afirmar que f é derivável, com

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -k \operatorname{sen}(k\theta) - k \cos^{k-1} \theta (-\operatorname{sen} \theta) \\ &= k(\cos^{k-1} \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}(k\theta)). \end{aligned}$$

Para $\theta \in (0, \pi/2)$, temos $k-1 < 0 < \cos \theta < 1$, $0 < k\theta < \theta$ e sen crescente. Portanto, seguem as relações $\cos^{k-1} \theta > 1$ e

⁴Confira a discussão ao final da p. 8 da aula *Exercícios - Parte I*, no módulo *Funções Contínuas*.

⁵Portanto, todo difeomorfismo também é um homeomorfismo, muito embora a recíproca seja falsa.

sen $\theta > \text{sen } k\theta$. Multiplicando essas duas últimas desigualdades, chegamos à conclusão de que $f' > 0$ em $(0, \pi/2)$, o que, juntamente com a igualdade $f(0) = 0$, dá $f(\theta) > 0$ para todo $\theta \in (0, \pi/2)$.

A solução está encerrada, pois $f(\theta) > 0$ equivale à desigualdade proposta no enunciado. $\square$

Exemplo 9. Considere a função $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ definida por

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Mostre que f é crescente e calcule os limites de $f(x)$ quando $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow +\infty$.

Solução. Reescrevendo a expressão que define $f(x)$ como

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

a regra da cadeia e demais regras de derivação implicam

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Isso nos leva ao estudo do sinal da função $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, de regra

$$g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

Sendo

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= -\frac{1}{x(x+1)^2}, \end{aligned}$$

vemos que g' é negativa, de sorte que g é decrescente. Daí,

$$g(x) > \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \ln(1+0) - 0 = 0$$

para cada $x > 0$, permitindo concluir que $f' = f \cdot g$ é positiva. Portanto, f é crescente.

Para calcular o limite de f na origem, façamos a mudança de variável $x = 1/y$, atentando ao fato de que $\frac{\ln(1+y)}{y} \rightarrow 0$ quando $y \rightarrow +\infty$ ⁶:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln f(x)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\ln f(1/y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+y)}{y}} \\ &= e^0 = 1.\end{aligned}$$

Para encerrar, o Teorema 7 da aula *Definição*, do módulo *Derivada como Função*, dá $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$. $\square$

Exemplo 10. Encontre todos os difeomorfismos $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes deriváveis e tais que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 x}{dy^2} \equiv 0.$$

Solução. Começaremos derivando a relação (10),

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

em relação a y . Para realizar esse cálculo, vale notar que o 2º membro é uma composição de três funções: $y \mapsto x = x(y)$, $x \mapsto z = dy/dx$ e $z \mapsto z^{-1}$. Logo, pela regra da cadeia,

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dy},$$

ou seja,

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}.$$

⁶Vide relação (5) da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo *Derivada como Função*.

Isso permite reescrever a EDO satisfeita por y como

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

ou, ainda,

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = 4 \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Assim como o 2º membro, o 1º membro da igualdade anterior também é uma derivada, qual seja, a derivada da função $x \mapsto (dy/dx)^4$. Então, devemos ter

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 4 \cdot \frac{dy}{dx} + k,$$

sendo k uma constante.

Dessa forma, qualquer avaliação de dy/dx em um ponto x é raiz do polinômio $X^4 = 4X + k$, de onde segue que a imagem da função derivada dy/dx é finita⁷. Como tal imagem é um intervalo, pois $x \mapsto dy/dx$ é contínua em toda a reta (já que é derivável), dy/dx é necessariamente constante.

Portanto, y é uma função afim da forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$ e b números reais. Reciprocamente, toda função afim nessas condições satisfaz $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 x}{dy^2} \equiv 0$, pois as segundas derivadas $d^2 y/dx^2$ e $d^2 x/dy^2$ são identicamente nulas.

Concluindo, o conjunto-solução da EDO dada consiste das funções afins não constantes. $\square$

Exemplo 11. *Existe alguma função duas vezes derivável $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x - \sin x) = x^4$$

para todo $x \in (-\pi, \pi)$?

⁷Lembre-se de que um polinômio real de grau $n \geq 1$ admite no máximo n raízes reais.

Solução. Não. Caso contrário, a primeira observação seria de que f é uma função par. Com efeito, a função $g := \text{Id} - \text{sen} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ é suave e sua imagem contém o intervalo $(-\pi, \pi)$. (Para verificar essa última afirmação, basta notar que a imagem de g é um intervalo e que $\lim_{x \rightarrow \pm\pi} g(x) = \pm\pi$). Assim, dado um número real $y \in (-\pi, \pi)$, podemos escrever $y = x - \text{sen } x$ para um certo $x \in (-\pi, \pi)$, de modo que

$$f(-y) = f((-x) - \text{sen}(-x)) = (-x)^4 = f(y).$$

Daí, pelo exemplo 2 da aula anterior, f' seria uma função ímpar, de sorte que $f'(0) = 0$.

Logo, pela proposição 1 aplicada a f' , existiria uma função $\phi : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, contínua na origem, tal que $f'(x) = x\phi(x)$ para todo $-\pi < x < \pi$.

Por outro lado, a regra da cadeia permitiria escrever

$$f'(x - \text{sen } x)(1 - \cos x) = 4x^3,^8$$

isto é,

$$(x - \text{sen } x)(1 - \cos x)\phi(x - \text{sen } x) = 4x^3.$$

Observando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{sen } x}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

a igualdade anterior daria

$$\begin{aligned} 4 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \text{sen } x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \phi(x - \text{sen } x) \right) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \phi(0) = 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. □

⁸Também é possível concluir dessa igualdade a relação $f'(0) = 0$.

Dicas para o Professor

A Proposição 1, devida ao matemático grego Constantin Carathéodory (1873 - 1950), se configura como uma alternativa à formulação clássica de diferenciabilidade. Como observado no artigo [1], esse resultado permite provas elegantes de vários teoremas do cálculo diferencial, em especial a regra da cadeia.

Em relação ao exemplo 11, *existe uma única função* $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ *satisfazendo a regra do enunciado*. Basta notar que a função g , definida na solução, determina um homeomorfismo do intervalo $(-\pi, \pi)$ sobre ele mesmo. Se denotarmos a inversa de g por h , então $f = h^4$ é a única função real definida em $(-\pi, \pi)$ e satisfazendo $f(x - \sin x) = x^4$ para cada x em seu domínio. Além disso, f é par, de classe C^1 e a restrição de f ao intervalo perfurado $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ é suave (todas as afirmações não demonstradas devem ser encaradas como exercícios). Nesses termos, o que fizemos na solução do último exemplo foi, essencialmente, mostrar que a segunda derivada de f na origem não existe.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. S. Kuhn. *The Derivative à la Carathéodory*. The American Mathematical Monthly, vol 98, nº 1 (jan, 1991), pp. 40 - 44.
2. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.
3. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.
4. M. Spivak. *Calculus*. 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.