Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Definição de Derivada

Reta Tangente - Parte 1

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de Junho de 2023

Nesta aula, apresentaremos exemplos envolvendo o cálculo do coeficiente angular de retas tangentes. Nesse sentido, temos, no teorema 6, um resultado útil que fornece, sob certas hipóteses, a regra para a derivada da função inversa.

Conforme a seção 2 da aula anterior, a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como a inclinação da reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto $(a,f(a))$. Para conveniência do leitor, registramos a seguir a equação reduzida dessa tangente:

$$t : y = f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1}$$

1 Exemplos

Exemplo 1. *Sejam r a reta tangente ao gráfico da função seno na origem e s a reta tangente ao gráfico da função logaritmo natural no ponto $(1,0)$. Mostre que r e s são paralelas.*

Solução. De acordo com o exemplo 8 da aula anterior, vale $\operatorname{sen}'(0) = 1$. Por outro lado, o exemplo 6 da aula *Várias Técnicas*, do módulo *Leis do Limite - Parte 2*, dá

$$\ln'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Assim, r e s possuem o mesmo coeficiente angular, 1, o que garante seu paralelismo — veja a figura a seguir. (Observe que, por 1, temos $r : y = x$ e $s : y = x - 1$.) □

Exemplo 2. *Se $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as funções quadráticas definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + 4x + 2$, mostre que existe, no plano, uma única reta tangente a seus gráficos.*

Solução. Seja t uma reta tangente aos gráficos de f e g nos pontos $(a,f(a))$ e $(b,g(b))$. Assim (vide exemplo 10 da aula anterior), por um lado t é dada por $y = a^2 + 2a(x - a)$, ou seja,

$$y = 2ax - a^2 \tag{2}$$

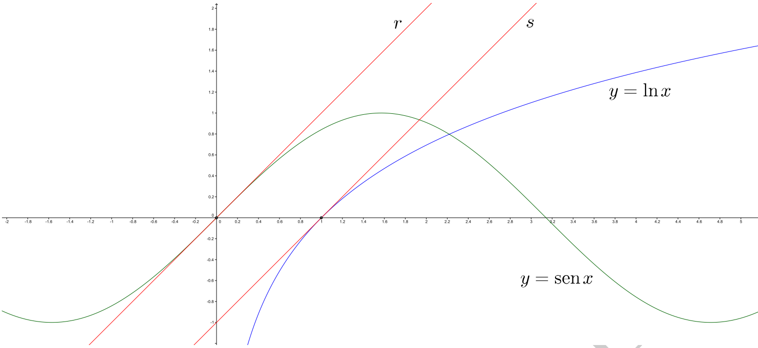

Figura 1: exemplo 1.

enquanto, por outro lado, t admite a equação

$$y = b^2 + 4b + 2 + (2b + 4)(x - b),$$

ou ainda,

$$y = 2(b + 2)x - (b^2 - 2). \tag{3}$$

Igualando, nos segundos membros das igualdades (2) e (3), os coeficientes dos termos de primeiro grau e constantes, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} a = b + 2 \\ a^2 = b^2 - 2 \end{cases},$$

que equivale a

$$\begin{cases} a - b = 2 \\ (a - b)(a + b) = -2 \end{cases}.$$

Substituindo o valor de $a - b$ na segunda equação, vem que $a + b = -1$, de onde seguem as igualdades $a = 1/2$ e $b = -3/2$. Portanto, segue de (2) (veja a próxima figura) que

$$t : y = x - 1/4.$$

Por construção, $y = x - 1/4$ é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto (1/2,1/4) e, como é fácil verificar,

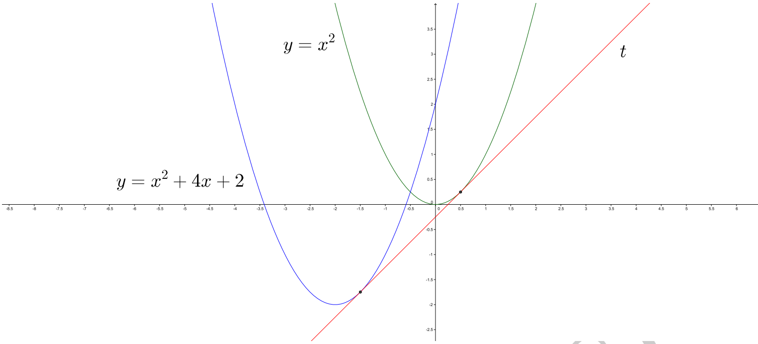

Figura 2: exemplo 2.

essa reta também tangencia o gráfico da função g, no ponto $(-3/2, -7/4)$. Mais ainda, pelos argumentos expostos, $y = x - 1/4$ é a única reta simultaneamente tangente aos gráficos de f e de g. $\square$

A função cúbica $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^3$, é derivável e, portanto, seu gráfico G admite uma reta tangente em cada um de seus pontos. Pela 1ª parte da proposição 8 da aula *Funções Racionais*, temos $g'(x) = 3x^2$, para cada x real. Daí, $g'(0) = 0$, de onde se conclui que a tangente a G na origem é o próprio eixo das abscissas.

Por outro lado, refletindo G com respeito à diagonal $x = y$, obtemos uma curva G^{-1}, o gráfico da inversa $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Dessa forma, a imagem (ainda pela reflexão com respeito à diagonal $x = y$) da tangente a G em $(a,g(a))$ é a reta tangente a G^{-1} no ponto $(g(a),a)$. Em particular, na origem, a reta tangente a G^{-1} é vertical (o eixo das ordenadas). Esse fato é constatado analiticamente pelo limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = +\infty,$$

mostrando-nos, também, que g^{-1} *não* é derivável na origem.

Desse modo, por razões geométricas, vale a pena estender o conceito de reta tangente.

Definição 3. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in I$ e*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty,$$

[1] *definiremos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$ como a reta vertical $x = a$.*

Exemplo 4. *Se $n > 1$ é ímpar, mostre que a reta $x = 0$ é tangente na origem ao gráfico da função raiz n-ésima.*

Solução. Para tratar do limite de $(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0})/(x - 0) = \sqrt[n]{x}/x$, quando x tende a 0 pela direita, suponhamos, sem perda de generalidade, $x \in (0,1)$. Desse modo, como $n > 2$, temos $x^2 > x^n$, relação equivalente a $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x} > x$, isto é,

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{x} > \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

Sendo $\lim_{x \to 0^+} 1/\sqrt[n]{x} = 1/0^+ = +\infty$, a desigualdade anterior assegura que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = +\infty. \tag{4}$$

Agora, para $x < 0$, a substituição $x = -y$ dá

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{-y}}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sqrt[n]{y}}{y} = +\infty,$$

em que a hipótese "n é ímpar" e a igualdade (4) foram utilizadas no cálculo acima.

Pelos limites obtidos, conclui-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = +\infty,$$

de onde segue, conforme a definição 3, o resultado desejado. $\square$

[1] Em particular, f não é derivável no ponto a.

Observação 5. *De acordo com a relação* (4)*, o exemplo anterior continua válido caso n seja par* (*troque "$>$" por "$\geq$" nas linhas* $3-5$ *da solução*)*.*

Para completar a discussão (iniciada após o exemplo 2) da relação entre as retas tangentes ao gráfico de f e as retas tangentes ao gráfico de f^{-1}, enunciaremos um importante resultado.

Teorema 6. *Sejam I, J intervalos e $f : I \to J$ uma bijeção contínua, derivável no ponto a.*

i) Se $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é derivável no ponto $b = f(a)$ e vale

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{5}$$

ii) Se $f'(a) = 0$, então f^{-1} não é derivável no ponto $b = f(a)$, mas o gráfico de f^{-1} admite reta tangente vertical no ponto $(b, f^{-1}(b))$.

Prova. Começaremos com a seguinte

Afirmação: dados $b = f(a) \in J$ e $g : J \setminus \{b\} \to \mathbb{R}$, existe $\lim_{y \to b} g(y)$ se, e só se, existe $\lim_{x \to a} g(f(x))$. Nesse caso, vale

$$\lim_{y \to b} g(y) = \lim_{x \to a} g(f(x)). \tag{6}$$

Com efeito, temos $y = f(x) \to b = f(a)$ quando $x \to a$, pois f é contínua, enquanto $x \neq a \Rightarrow f(x) \neq b$, já que f é injetiva. Assim, a parte da afirmação relativa ao "só se" é, agora, uma consequência direta da *mudança de variável no limite*[2]. Além disso, esse mesmo resultado garante a igualdade (6).

Reciprocamente, seja $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ a composta de f com g e suponha que exista $\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(f(x))$. Pelo exemplo 15 da aula *Continuidades Laterais e em um intervalo*, do módulo anterior, $f^{-1} : J \to I$ também é contínua.

[2]Veja a aula *Teorema do Sanduíche* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*.

Daí, repetindo o argumento do parágrafo anterior, conclui-se que $\lim_{y\to b} g(y) = \lim_{y\to b} h(f^{-1}(y))$ existe e

$$\lim_{y\to b} h(f^{-1}(y)) = \lim_{x\to a} h(x),$$

igualdade que nada mais é do que a relação (6). Isso justifica a afirmação.

Agora, seja $g : J \setminus \{b\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b},$$

de forma que

$$g(f(x)) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}},$$

para cada $x \in I \setminus \{a\}$. Vejamos que $\lim_{x\to a} g(f(x))$ existe.

Primeiramente, f é estritamente monótona, digamos, decrescente, pelo (já citado) exemplo 15 da aula *Continuidades Laterais e em um intervalo*. Logo, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, verifica-se a desigualdade

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0.$$

Sendo assim, a regra do quociente garante que, quando $x \to a$,

$$g(f(x)) = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \to \begin{cases} 1/f'(a), & \text{se } f'(a) \neq 0 \\ 1/0^- = -\infty, & \text{se } f'(a) = 0 \end{cases}.$$

Dessa forma, existe $\lim_{x\to a} g(f(x))$ e, pela afirmação acima, também existe $\lim_{y\to b} g(y) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b}$, com

$$\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \begin{cases} 1/f'(a), & \text{se } f'(a) \neq 0 \\ -\infty, & \text{se } f'(a) = 0 \end{cases}.$$

Portanto, se $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é derivável em b e a fórmula (5) se cumpre. Por outro lado, caso valha $f'(a) = 0$, vemos que a reta tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto $(b, f^{-1}(b))$ é vertical. $\square$

Seja n um número natural. Pela proposição 8 da aula *Funções Racionais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(y) = y^n$, é derivável e tal que $g'(y) = ny^{n-1}$, para cada $y \in \mathbb{R}$. O corolário abaixo mostra que uma regra similar vale para a derivada da função raiz n-ésima.

Corolário 7. *Sejam $D = [0, +\infty)$ ou $D = \mathbb{R}$, conforme se tenha n par ou n ímpar, e $f : D \to D$ a função raiz n-ésima. Então, f é derivável em cada ponto $x \neq 0$ em D* [3]*, com*

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Prova. De fato, nas notações acima, f é a inversa da restrição $g_{|D} : D \to D$. Como $y \neq 0 \Rightarrow g'(y) \neq 0$, o teorema 6 garante que f é derivável em todo ponto $x = g(y)$ satisfazendo $y = \sqrt[n]{x} \neq 0$, ou seja, $f'(x)$ existe para cada $x \neq 0$ em D. Além disso, pela fórmula (5), temos

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

$\square$

Exemplo 8. *Sejam c um número real e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = \sqrt[3]{x} + cx$. Determine os possíveis valores de c, sabendo que as retas tangentes ao gráfico de φ nos pontos de abscissas 0 e 1 fazem um ângulo de $45°$.*

Solução. Seja f a função raiz cúbica. De acordo com o corolário anterior, f é derivável em cada ponto $x \neq 0$, valendo

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3x^{2/3}}.$$

Por outro lado, se $x = 0$, sabemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty.$$

[3] Pelo exemplo 4 e a observação subsequente, f não é derivável na origem, de sorte que f é derivável, precisamente, em $D \setminus \{0\}$.

Com essas relações em mente, temos

$$\begin{aligned}
\varphi'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}+cx-(1+c)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)+c(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}+c\right] \\
&= f'(1)+c = \frac{1}{3}+c,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}+cx}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sqrt[3]{x}}{x}+c\right] \\
&= +\infty + c = +\infty.
\end{aligned}$$

Em particular, a reta tangente ao gráfico de φ na origem é o eixo das ordenadas. Como uma reta faz $45°$ com o eixo OY se, e só se, o ângulo (orientado) de OX para essa reta valer $\pm 45°$, a tangente ao gráfico de φ no ponto de abscissa 1, cuja inclinação é $c+1/3$, deve satisfazer

$$c+\frac{1}{3} = \operatorname{tg}(\pm 45°) = \pm 1,$$

de sorte que $c=-4/3$ ou $c=2/3$.

□

Definição 9. *Se r é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto P, a perpendicular a r por P chama-se* reta normal *ao gráfico de f em P.*

Assim, se f é derivável em a e $f'(a)\neq 0$, a normal ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$ tem equação [4]

[4]Lembre-se de que duas retas $y=mx+n$ e $y=m'x+n'$ são perpendiculares se, e somente se, $mm'=-1$.

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a). \qquad (7)$$

Por exemplo, a reta normal ao gráfico da função seno na origem é a bissetriz dos quadrantes pares.

Exemplo 10 (IME - 1997, adaptação do problema 10). *Sejam $\mathcal{P}$ a parábola $y = x^2$, de foco $F = (0{,}1/4)$, e considere uma corda MM', normal a $\mathcal{P}$ em M. Sabendo que o ângulo $\angle MFM'$ é reto, calcule as medidas dos segmentos FM e FM'.*

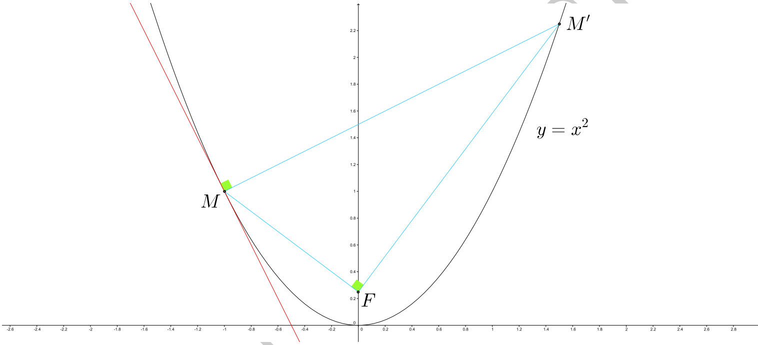

Figura 3: exemplo 10.

Solução. Se $M = (a,a^2)$, $a \neq 0$,[5] e $M' = (a',a'^2)$, podemos calcular o coeficiente angular m da reta normal $\overleftrightarrow{MM'}$ de dois modos: por (7),

$$m = -\frac{1}{2a};$$

calculando o coeficiente angular de MM', temos

$$m = \frac{a'^2 - a^2}{a' - a} = a + a'.$$

[5] A normal ao gráfico de $y = x^2$ na origem é o eixo das ordenadas, que corta o gráfico em um único ponto (como toda reta vertical). Logo, $a \neq 0$.

Das igualdades acima, obtemos a relação

$$a + a' = -\frac{1}{2a},$$

que, como ficará claro adiante, convém ser reescrita nas formas

$$a' - a = -\frac{4a^2 + 1}{2a} \tag{8}$$

e

$$4aa' + 1 = -(4a^2 + 1). \tag{9}$$

Por outro lado, a condição de perpendicularismo das retas $\overleftrightarrow{FM}$ e $\overleftrightarrow{FM'}$ se expressa como

$$\frac{a^2 - 1/4}{a} \cdot \frac{a'^2 - 1/4}{a'} = -1,$$

isto é,

$$(aa')^2 - (a/2)^2 - (a'/2)^2 + (1/4)^2 = -aa'$$

ou, ainda,

$$(aa')^2 + (1/4)^2 = (a/2)^2 - aa' + (a'/2)^2.$$

Somando $aa'/2$ a ambos os membros da igualdade anterior, vem que

$$\begin{aligned} &(aa')^2 + aa'/2 + (1/4)^2 = (a/2)^2 - aa'/2 + (a'/2)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (aa' + 1/4)^2 = [(a' - a)/2]^2 \\ &\Leftrightarrow (4aa' + 1)^2/16 = (a' - a)^2/4 \\ &\Leftrightarrow (4aa' + 1)^2 = 4(a' - a)^2. \end{aligned}$$

Utilizando as relações (9) e (8), obtemos

$$\cancel{(4a^2 + 1)^2} = \cancel{4}\frac{\cancel{(4a^2 + 1)^2}}{\cancel{4}a^2},$$

o que dá $a^2 = 1$. Assim, sendo $a' = -(2a^2 + 1)/2a = -3/2a$, chegamos a $a'^2 = 9/4$.

Finalmente, pela fórmula da distância entre dois pontos,

$$\overline{FM} = \sqrt{(a-0)^2 + (a^2 - 1/4)^2} = \sqrt{1 + (3/4)^2} = 5/4$$

e

$$\overline{FM'} = \sqrt{(a'-0)^2 + (a'^2 - 1/4)^2} = \sqrt{9/4 + 2^2} = 5/2.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo deste material.

Em um primeiro encontro, o professor poderá tratar dos exemplos 1, 2 e 4, finalizando sua aula com o teorema 6. Recomendamos que, nesse momento inicial, apenas a interpretação geomética desse teorema seja explorada (adapte a discussão que segue o exemplo 2), postergando sua demonstração para o 2º encontro, quando os demais exemplos serão resolvidos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.