Material Teórico - Determinantes como Áreas - Parte I

Introdução aos Determinantes

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Maio de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

Ao longo deste módulo, interpretaremos geometricamente o valor absoluto e o sinal do determinante $ad-bc$ de uma matriz invertível $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Propriedades importantes do determinante serão destacadas e várias aplicações serão apresentadas. Utilizaremos as notações e os resultados desenvolvidos nos módulos *Geometria das Transformações Lineares* e *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria*.

1 Áreas e determinantes

No lema 7 da 1ª aula do módulo *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria* estabelecemos o seguinte resultado: *dois vetores $u=(a,b)$ e $v=(c,d)$ são não colineares se, e só se, $ad-bc\neq 0$. De outro modo, os vetores u e v têm direções distintas se, e somente se, o determinante da matriz cujas colunas são (as coordenadas de) u e v é não nulo.* Como veremos a seguir, $|ad-bc|$ é a *área* do paralelogramo determinado por u e v. Quando dizemos "o paralelogramo determinado por u e v", nos referimos a *qualquer* paralelogramo $ABDC$ tal que $u=\overrightarrow{AB}$ e $v=\overrightarrow{AC}$ (veja a figura 1). Embora haja uma infinidade de tais paralelogramos, todos eles são mutuamente congruentes (em particular, têm a mesma área).

Se θ é o ângulo entre os vetores não colineares $u=(a,b)$ e $v=(c,d)$, a relação (2) da aula mencionada acima nos garante que

$$\cos\theta=\frac{ac+bd}{|u||v|}. \tag{1}$$

Sendo $\operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$, $|u|^2=a^2+b^2$ e $|v|^2=c^2+d^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta&=\sqrt{1-\frac{(ac+bd)^2}{|u|^2|v|^2}}\\&=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}}{|u||v|}\end{aligned}$$

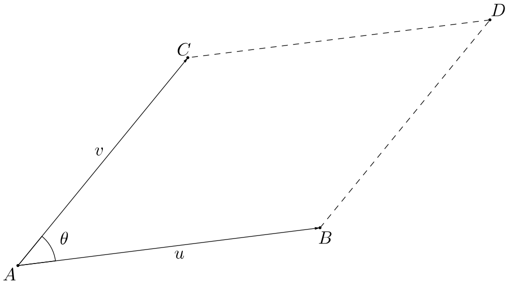


Figura 1: o paralelogramo determinado por u e v.

$$= \frac{\sqrt{(ad-bc)^2}}{|u||v|}$$
$$= \frac{|ad-bc|}{|u||v|},$$

de modo que $|u||v|\operatorname{sen}\theta = |ad-bc|$. Lembrando que a área de um paralelogramo pode ser calculada como o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes multiplicado pelo seno do ângulo compreendido, acabamos de provar o seguinte resultado.

Proposição 1. *Sejam $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ vetores não-colineares. Então, a área do paralelogramo determinado por u e v é $|ad-bc|$, o valor absoluto do determinante da matriz cujas colunas são u e v.*

Observação 2. *Caso u e v sejam vetores colineares, é natural definir como nula a área do "paralelogramo" associado ao par (u,v). Com essa convenção, a proposição anterior torna-se verdadeira para quaisquer vetores u e v do plano.*

Corolário 3. *Considere um triângulo ABC, em que $A = (x_A,y_A), B = (x_B,y_B)$ e $C = (x_C,y_C)$. Então, a área de ABC é $\frac{1}{2}|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)|$.*

Prova. De fato, a área de ABC é a metade da área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

e $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A)$. □

Agora devemos interpretar o sinal do determinante.

Proposição 4. *Nas hipóteses da proposição anterior, suponha ainda que $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$. Então, $ad - bc$ é positivo se, e somente se, o sentido da menor rotação que leva a semirreta $\overrightarrow{AB}$ na semirreta $\overrightarrow{AC}$ é o sentido anti-horário.*

Prova. Seja $u^* = (-b,a)$ o vetor obtido de u pela rotação de $90°$ no sentido anti-horário. Observe que o sentido da menor rotação que leva $\overrightarrow{AB}$ em $\overrightarrow{AC}$ é anti-horário se, e só se, o ângulo α entre u^* e v é agudo, o que equivale a $\cos\alpha > 0$. Levando em conta a relação (1), temos $\cos\alpha > 0$ se, e só se, $ad - bc = (-b)c + ad > 0$, como desejado. □

Doravante, devemos nos referir à expressão $ad - bc$ como a *área orientada* do paralelogramo definido pelos vetores $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$.

Denotaremos por $[u,v]$ a matriz cujas colunas são, nessa ordem, u e v, de forma que $\det[u,v] = ad - bc$.

1ª Propriedade dos Determinantes (Alternância):

$$\det[v,u] = -\det[u,v],$$

ou seja, o determinante muda de sinal caso as colunas (ou as linhas) sejam permutadas.

Geometricamente falando, a propriedade acima expressa que, mudando o vetor de referência, mudamos também o sentido da menor rotação que leva o vetor de referência no outro vetor (veja a figura 2).

1.1 A regra de Cramer

Sejam u e v vetores não colineares. Então, cada vetor w do plano se expressa, de forma única, como $w = \alpha\cdot u + \beta\cdot v$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, fato que manifesta a bidimensionalidade do plano. Vejamos como interpretar os coeficientes α e β em termos de áreas

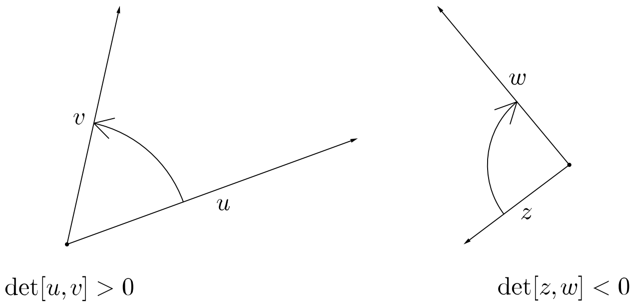


Figura 2: o significado do sinal do determinante.

orientadas. Denotaremos a área de uma região $\mathcal{R}$ do plano por $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Para fixar as ideias, suponha que os vetores estejam dispostos como na figura 3, em que $u = \overrightarrow{OA}, \alpha \cdot u = \overrightarrow{OE}, v = \overrightarrow{OB}, \beta \cdot v = \overrightarrow{OF}$ e $w = \overrightarrow{OC}$.

Como dois paralelogramos de mesma altura estão entre si como as suas bases[1], temos

$$\alpha = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{\mathcal{A}(OEJB)}{\mathcal{A}(OADB)} = \frac{\mathcal{A}(OCIB)}{\mathcal{A}(OADB)},$$

isto é,

$$\alpha = \frac{\det[w,v]}{\det[u,v]}. \tag{2}$$

Analogamente,

$$\beta = \frac{\det[u,w]}{\det[u,v]}. \tag{3}$$

[1]Isto é, se $XYZW$ e $X'Y'Z'W'$ são paralelogramos de mesma altura relativamente às bases XY e $X'Y'$, então $\frac{\mathcal{A}(XYZW)}{\mathcal{A}(X'Y'Z'W')} = \frac{\overline{XY}}{\overline{X'Y'}}$.

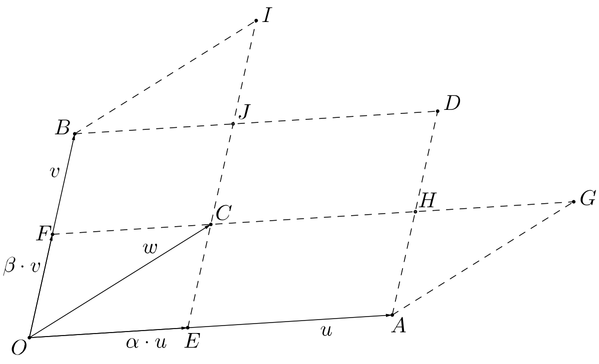


Figura 3: áreas orientadas e a regra de Cramer.

Na verdade, as relações (2) e (3) são válidas para qualquer terna de vetores (u,v,w), desde que u e v sejam não-colineares. É o que nos garante o próximo teorema, conhecido como *regra de Cramer* (desse resultado também segue a afirmação feita no início da subseção).

Teorema 5 (regra de Cramer[2]). *Sejam* $u = (a,b)$ *e* $v = (c,d)$ *vetores não-colineares (ou seja,* $ad - bc \neq 0$*). Então, para qualquer vetor* $w = (e,f)$*, a equação em* x,y

$$x \cdot u + y \cdot v = w,$$

ou, equivalentemente, o sistema linear

$$\begin{cases} ax + cy = e \\ bx + dy = f \end{cases}$$

admite uma única solução (α,β)*. Além disso, valem as fórmulas* (2) *e* (3)*.*

Prova. Um cálculo direto. $\square$

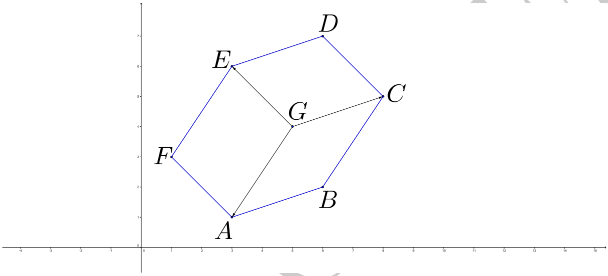
[2]Em homenagem a Gabriel Cramer (1704-1752), matemático suíço.

2 Exemplos

Nesta seção, ilustraremos as ideias discutidas acima discutindo alguns exemplos interessantes.

Exemplo 6. *Calcule a área do hexágono de vértices* $A = (3,1), B = (6,2), C = (8,5), D = (6,7), E = (3,6)$ *e* $F = (1,3)$.

Solução. Inicialmente, veja que os lados opostos do hexágono são paralelos e de mesmo comprimento. Com efeito, é fácil verificar as igualdades $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = (3,1)$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = (2,3)$ e $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} = (-2,2)$.



Portanto, se G é o resultado da translação de A pelo vetor $\overrightarrow{BC}$ (i. e., $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BC}$), segue que $G = (5,4)$ é interno a $ABCDEF$ e os quadriláteros $ABCG$, $GCDE$ e $GEFA$ são paralelogramos. Logo,

$$\mathcal{A}(ABCDEF) = \mathcal{A}(ABCG) + \mathcal{A}(GCDE) + \mathcal{A}(GEFA).$$

Sendo $\det[\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GC}] = 7$, $\det[\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GE}] = 8$ e $\det[\overrightarrow{GE},\overrightarrow{GA}] = 10$, a Proposição (1) nos dá $\mathcal{A}(ABCDEF) = 7 + 8 + 10 = 25$ unidades de área. $\square$

Exemplo 7. *Mostre que, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas fixado, a distância do ponto* $P = (x_0,y_0)$ *à reta* r *de equação* $ax + by + c = 0$ *é* $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Solução. Tome um ponto arbitrário $A = (x,y)$ sobre a reta r. Daí é fácil ver que o ponto $B = (x - b,y + a)$ também pertence a r. A distância d do ponto P à reta r nada mais é do que a altura, relativa ao vértice P, do triângulo PAB. Logo, $d = \frac{2\mathcal{A}(PAB)}{\overline{AB}}$. Note que

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = |(-b,a)| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Por outro lado, pela Proposição (1), temos

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(APB) &= |\det[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}]| \\ &= |\det[(x_0-x,y_0-y),(-b,a)]| \\ &= |a(x_0-x)+b(y_0-y)| \\ &= |ax_0+by_0+c|, \end{aligned}$$

sendo que, na última igualdade, utilizamos a relação $c = -ax-by$. A fórmula segue imediatamente dos cálculos realizados. □

Exemplo 8. *Dado um triângulo ABC, descreva o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que*

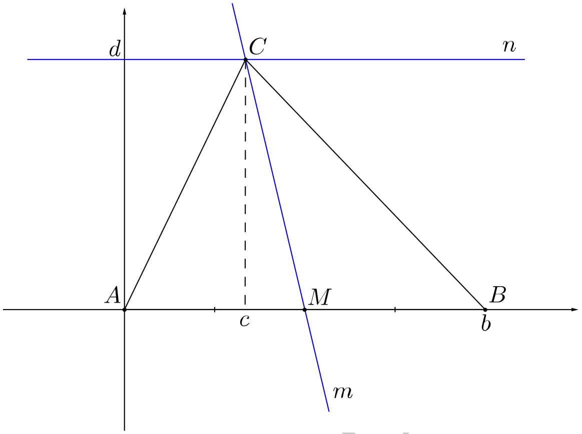
$$\mathcal{A}(CAP) = \mathcal{A}(CBP).$$

Solução. Escolhamos o sistema de coordenadas de tal modo que $A = (0,0), B = (b,0)$ e $C = (c,d)$. Se $P = (x,y)$, o Corolário (3) nos garante que a igualdade $\mathcal{A}(CAP) = \mathcal{A}(CBP)$ equivale à relação algébrica

$$\frac{1}{2}|cy-dx| = \frac{1}{2}|(c-b)y-d(x-b)|.$$

Portanto, o LG requerido consiste da reunião dos conjuntos soluções das equações $cy-dx = (c-b)y-d(x-b)$ e $-(cy-dx) = (c-b)y-d(x-b)$.

Efetuando os cálculos, a primeira equação se reduz a $y = d$, representando a reta n paralela a AB pelo ponto C, ao passo que a segunda equação se escreve como $d(x-c)+(\frac{b}{2}-c)(y-d) = 0$, o que representa uma reta m passando pelo vértice C. Note que m corta o eixo das abscissas no ponto $M = (b/2,0)$, o ponto médio do lado AB, ou seja, m é a reta suporte da mediana CM. Dessa forma, o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\mathcal{A}(CAP) = \mathcal{A}(CBP)$ é a reunião $m \cup n$ (veja a figura a seguir). $\square$



Dicas para o Professor

O Professor pode, utilizando algumas regras básicas de determinantes, transformar a fórmula para a área de um triângulo apresentada no Corolário (3) naquela que se encontra na maioria dos livros de geometria analítica, a saber, $\mathcal{A}(ABC)$ é a metade do valor absoluto do determinante 3×3

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

De fato, como o determinante não se altera quando somamos a uma linha um múltiplo de uma outra linha, vale

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix}.$$

Utilizando o desenvolvimento de Laplace na 3ª coluna desse último determinante, chegamos na fórmula do Corolário (3).

Se pensamos em determinantes 2×2 como áreas orientadas, também é possível interpretar determinantes 3×3 como *volumes orientados*. Nesse sentido, a regra de Cramer para sistemas 3×3 pode ser igualmente interpretada em termos desses volumes.

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima. *Coordenadas no Plano*. 6ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. E. L. Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2ª ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.