Material Teórico - Círculo Trigonométrico

Secante, cossecante e cotangente

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de dezembro de 2018

1 Inversas numéricas: cossecante, secante e cotangente

As funções cossecante, secante e cotangente são conhecidas como as inversas numéricas das funções seno, cosseno e tangente, nessa ordem.

Lembre-se de que inverter um número real não nulo x significa calcular $1/x$, ou seja, dividir 1 por x. Com isso, definimos

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \text{ desde que } \operatorname{sen}(\alpha) \neq 0$$

e

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}, \text{ desde que } \cos(\alpha) \neq 0,$$

onde os símbolos $\csc(\alpha)$ e $\sec(\alpha)$ são lidos como "cossecante de alfa" e "secante de alfa", respectivamente.

Ao definir a cotangente devemos ter mais cuidado. Lembre-se de que $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, que só está definida quando $\cos(\alpha) \neq 0$. Por conta disso, definimos

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \text{ desde que } \operatorname{sen}(\alpha) \neq 0,$$

onde o símbolo $\operatorname{ctg}(\alpha)$ é lido como "cotangente de alfa".

Veja que quando $\operatorname{sen}(\alpha) \neq 0$ e $\cos(\alpha) \neq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\alpha)}.$$

Contudo, há valores de α para os quais $\operatorname{ctg}(\alpha)$ existe mas $\operatorname{tg}(\alpha)$ não existe, e vice-versa.

Exemplo 1. *Escreva os valores de* $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\operatorname{tg}(\alpha)$, $\sec(\alpha)$, $\csc(\alpha)$ *e* $\operatorname{ctg}(\alpha)$ *em cada item abaixo:*

(a) $\alpha = \pi/6$.

(b) $\alpha = 3\pi/2$.

Solução.
(a) Para $\alpha = \pi/6$ (e lembrando que $\pi/6\,\text{rad} = 30°$), vimos na aula 1 que

$$\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}, \quad \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como todos esses valores são diferentes de zero, para calcular os demais valores basta inverter as frações correspondentes:

$$\csc(\pi/6) = 2, \quad \sec(\pi/6) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \operatorname{ctg}(\pi/6) = \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

(Note que a cossecante é a inversa numérica do seno e não do cosseno.)

(b) Para $\alpha = 3\pi/2$, temos um arco que determina o ponto $P = (0, -1)$ no círculo trigonométrico. Assim,

$$\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1 \quad \text{e} \quad \cos(3\pi/2) = 0.$$

Neste caso, como o cosseno é zero, $\operatorname{tg}(3\pi/2)$ e $\sec(3\pi/2)$ não estão definidas (ou seja, não existem). Mas, podemos calcular

$$\csc(3\pi/2) = \frac{1}{\operatorname{sen}(3\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1$$

e

$$\operatorname{ctg}(3\pi/2) = \frac{\cos(3\pi/2)}{\operatorname{sen}(3\pi/2)} = \frac{0}{-1} = 0. \qquad \square$$

Vejamos, agora, como os valores de $\csc(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ e $\operatorname{ctg}(\alpha)$ aparecem geometricamente ao visualizarmos α no círculo trigonométrico. Veremos também uma visualização alternativa (à da aula passada) para $\operatorname{tg}(\alpha)$.

Seja $P = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ o ponto sobre o círculo trigonométrico correspondente ao arco α. Como de costume, sejam $O = (0,0)$ e $A = (1,0)$. Defina ainda B como o pé da perpendicular de P ao eixo dos cossenos e C o ponto de encontro de OP com o eixo das tangentes (veja a Figura 1). Na aula 2 desse módulo vimos que $C = (1, \operatorname{tg}(\alpha))$.

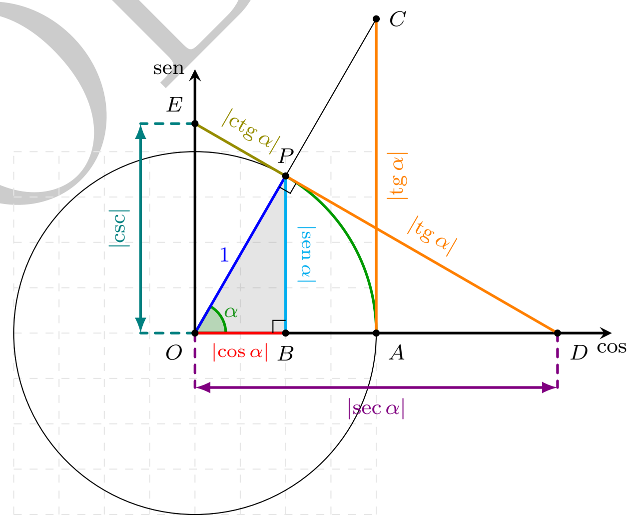


Figura 1: principais razões trigonométricas.

Também nas notações da Figura 1, trace a reta r, que passa por P e é tangente ao círculo trigonométrico. Veja que OP é perpendicular a r (pelo fato de r ser tangente ao círculo e OP ser raio dele). Seja D o ponto de interseção de r com o eixo dos cossenos (eixo horizontal) e E o ponto de interseção de r com o eixo dos senos (eixo vertical).

Como $\angle OBP = \angle OPD = 90°$, os triângulos OPB, ODP são semelhantes, pelo caso "ângulo, ângulo" (já que ambos também possuem α como ângulo). Logo,

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \implies \frac{\overline{OD}}{1} = \frac{1}{|\cos(\alpha)|} \implies \overline{OD} = |\sec(\alpha)|$$

e

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \implies \frac{\overline{DP}}{1} = \frac{|\text{sen}(\alpha)|}{|\cos(\alpha)|} \implies \overline{DP} = |\text{tg}(\alpha)|\,.$$

Pelo menos raciocínio, considerando o pé da perpendicular de P ao eixo dos senos, conclui-se que

$$\overline{OE} = |\csc(\alpha)| \quad \text{e} \quad \overline{EP} = |\text{ctg}(\alpha)|\,.$$

Se considerados também os casos em que P se encontra nos demais quadrantes, as relações acima continuam satisfeitas. Além disso, sempre vale que $D = (\sec(\alpha), 0)$ e $E = (0, \csc(\alpha))$. Note que, nas coordenadas de D e E, ao contrário das expressões anteriores, *não* tomamos o valor absoluto.

Exemplo 2. *Mostre que* $\text{tg}^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$*, sempre que* $\text{tg}(\alpha)$ *e* $\sec(\alpha)$ *estiverem definidas, ou seja, sempre que* $\cos(\alpha) \neq 0$.

Solução 1. Isso é consequência imediata do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OPD da Figura 1. □

Solução 2. Na aula passada, vimos que

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1,$$

igualdade obtida aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OBP da Figura 1. Como estamos considerando que $\cos(\alpha) \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da equação acima por $\cos^2(\alpha)$. Daí,

$$\frac{\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos(\alpha)}\right)^2.$$

Por fim, a última igualdade acima é claramente equivalente a

$$\text{tg}^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha).$$ □

2 As funções inversas: arcoseno, arcocosseno, arcotangente.

Em contraste com a seção anterior, dessa vez estamos interessados em definir (com domínios apropriados) as *funções inversas* das funções cosseno, seno e tangente. Essas funções são chamadas, respectivamente, de funções arcocosseno, arcoseno e arcotangente.

Por exemplo, não estamos mais interessados no inverso do número $\cos(\alpha)$, mas sim na função inversa da função cosseno.

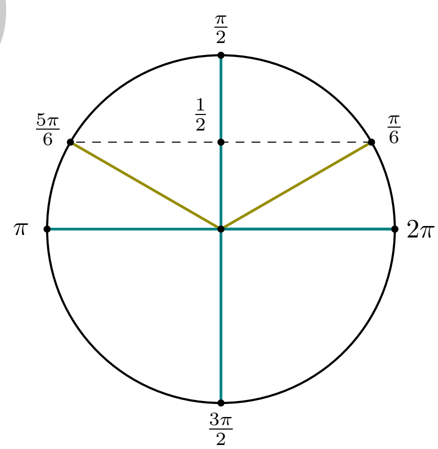
A função inversa de uma função $f : A \to B$ foi definida no módulo "Funções - Noções Básicas" do Nono Ano. Conforme estudamos, a função inversa de f só existe quando f é bijetiva. Nesse caso, a inversa é a função $f^{-1} : B \to A$ tal que, para todos $x \in A$ e $y \in B$,

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Consideremos primeiramente a função sen. Sua inversa em y é usualmente representada como $\text{sen}^{-1}(y)$ ou como $\text{arcsen}(y)$ (lê-se arco-seno de y). Enquanto a função sen recebe um arco x e nos informa uma razão trigonométrica (variando de -1 a 1), temos que a função arcsen recebe um número y no intervalo $[-1, 1]$ e nos informa um arco cujo seno é igual a y. Contudo, há um problema: para cada valor de y, se considerássemos o domínio da função seno como o conjunto de todos os números reais, existiriam vários arcos que possuiriam seno igual a y (como mostra o exemplo seguinte), enquanto a função arcsen deve escolher apenas um deles.

Exemplo 3. *Encontre todos os arcos* α *que satisfazem* $\text{sen}(\alpha) = 1/2$.

Solução. Conforme podemos perceber no círculo trigonométrico abaixo, para que um arco possua seno igual a $1/2$ ele deve ser congruente a um arco de medida $\pi/6$ ou $5\pi/6$ (os quais equivalem a 30° e 150°, respectivamente).



Assim, $\text{sen}(\alpha) = 1/2$ se, e somente se, existe um inteiro k tal que:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$ □

Voltando à discussão anterior, o problema é essencialmente que a função seno, com domínio $\mathbb{R}$, não é bijetiva. Para resolver essa situação, a solução é restringir o domínio da função seno, considerando apenas arcos variando de $-\pi/2$ a $\pi/2$. O motivo da escolha do intervalo $I = [-\pi/2, \pi/2]$ é que este é o maior intervalo ao qual pertence o número 0 e tal que $\text{sen} : I \to [-1{,}1]$ é bijetiva. Isso pode ser evidenciado observando o gráfico da função seno na Figura 2: apagando a parte que está pontilhada, o gráfico que sobra é tal que toda reta horizontal que corta o eixo-y de -1 a 1 intersecta o gráfico em exatamente um ponto (com abscissa situada de $-\pi/2$ a $\pi/2$).

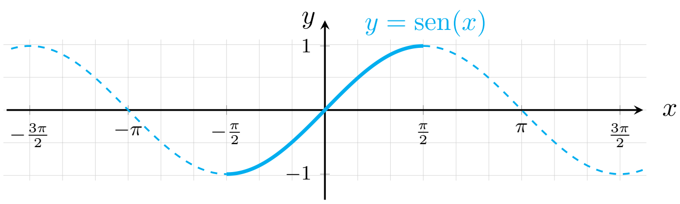


Figura 2: gráfico da função seno, de -5 a 5.

Com isso, podemos definir a função

$$\operatorname{arcsen} : [-1, -1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

da seguinte forma:

$$\operatorname{arcsen}(y) = x \iff \begin{cases} \operatorname{sen}(x) = y & \text{e} \\ -\pi/2 \le x \le \pi/2. \end{cases}$$

Por construção, o valor de $\operatorname{arcsen}(x)$ está unicamente determinado, para todo x tal que $-1 \le x \le 1$. O gráfico dessa função é exibido na Figura 3; como ocorre com os gráficos de funções inversas em geral, o gráfico da função arcsen é obtido refletindo o gráfico da função seno, no intervalo de $-\pi/2$ a $\pi/2$, em relação à reta $x = y$.

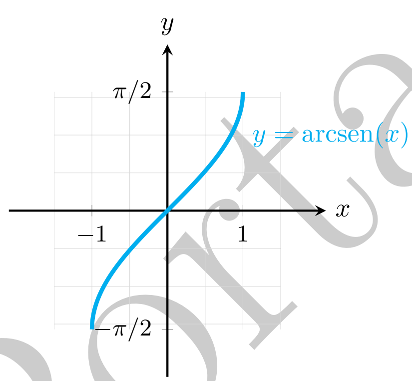


Figura 3: gráfico da função arcoseno.

Exemplo 4. *Encontre o valor de* $\operatorname{arcsen}(1/2)$.

Solução. Queremos encontrar um arco de medida x tal que $\operatorname{sen}(x) = 1/2$ e $-\pi/2 < x < \pi/2$. Observando a solução do Exemplo 3, temos que único valor de x que satisfaz isso é $x = \pi/6$. Logo,

$$\operatorname{arcsen}(1/2) = \pi/6. \qquad \square$$

Agora, consideremos a função cos. Assim como fizemos com a função seno, se considerarmos o domínio de cos como o conjunto de todos os números reais, essa função não será bijetiva. Observando o gráfico da função cosseno (veja a Figura 4), dessa vez o intervalo I que contém o número zero e é tal que $\cos : I \to [-1, 1]$ é bijetiva é $I = [0,\pi]$.

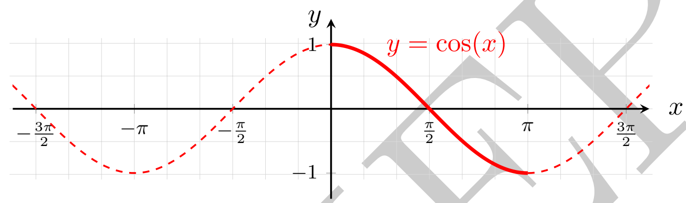


Figura 4: gráfico da função cosseno, de -5 a 5.

Com isso, podemos definir a função

$$\arccos : [-1, -1] \to [0, \pi]$$

de modo que

$$\arccos(y) = x \iff \begin{cases} \cos(x) = y & \text{e} \\ 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Seu gráfico é mostrado na figura a seguir (novamente, observe sua relação com o gráfico da função cosseno no intervalo $[0,\pi]$).

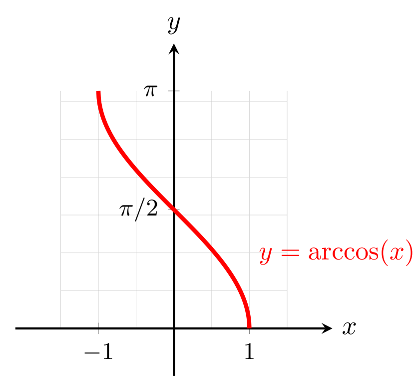


Figura 5: gráfico de arcocosseno.

Problema 5. *Mostre que, para todo* $x \in [-1, 1]$*, vale a igualdade*

$$\operatorname{arcsen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Por fim, faremos uma discussão análoga à acima para obter a inversa da função tg. O intervalo do domínio ao qual ela será restringida é o intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$, o que pode ser evidenciado pela Figura 6, levando em consideração que a tangente não está definida quando $x = -\pi/2$

ou $x = \pi/2$, de modo que $-\pi/2$ e $\pi/2$ não pertencem ao domínio de tg. Uma diferença fundamental é que, mesmo quando x varia apenas entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, o valor de $\mathrm{tg}(x)$ varia sobre todos os números reais. Assim, a função inversa, arctg, possui como domínio o conjunto de todos os reais e como contra-domínio o intervalo aberto $(-\pi/2, \pi/2)$.

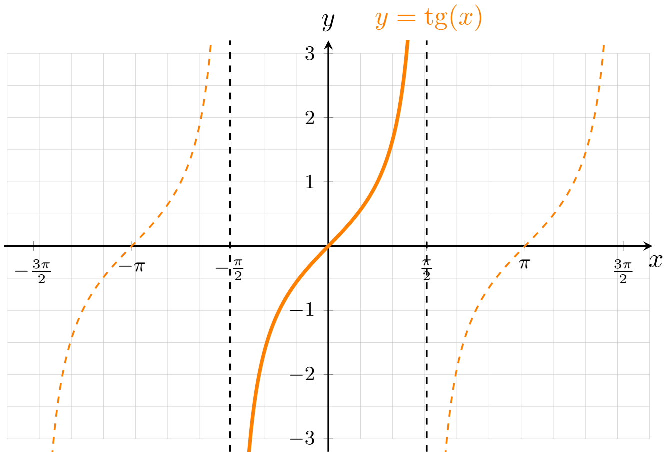


Figura 6: gráfico de tangente no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$.

Formalmente, definimos a função

$$\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$

de modo que

$$\mathrm{arctg}(y) = x \iff \begin{cases} \mathrm{tg}(x) = y \quad \text{e} \\ -\pi/2 < x < \pi/2. \end{cases}$$

Seu gráfico, mostrado na figura a seguir, é obtido pela reflexão, em torno da reta $y = x$, da porção do gráfico da função tangente no intervalo $\big(-\pi/2, \pi/2\big)$.

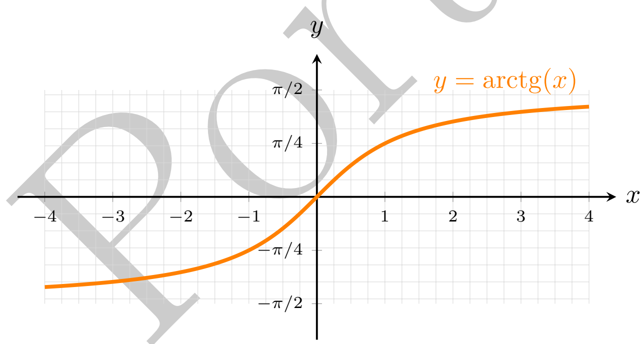
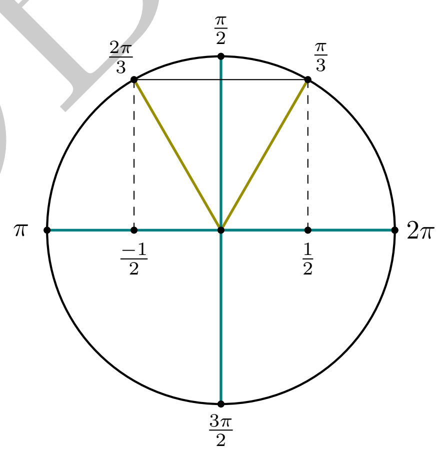


Figura 7: gráfico de arcotangente, de -4 a 4.

Observação 6. *Apesar de que o formato do gráfico da função* arcsen *lembra um pouco o formato do gráfico função* tg*, eles são bem diferentes. A principal diferença é que seus domínios e contra-domínios são diferentes; em especial, o valor máximo atingido no gráfico de* arcsen *é* $\pi/2$*, enquanto que o gráfico de* tg *pode assumir valores tão grandes quanto se queira. Por isso, não há como desenhar todos os pontos desse gráfico no papel e, na Figura 6, temos que imaginar que o gráfico se estende infinitamente para cima, assim como para baixo. Além disso, as* curvaturas *desses dois gráficos não são as mesmas. Apesar de serem parecidas a olho nu, o gráfico de* tg *é bem mais alongado que o de* arcsen*. A diferença fica clara nas Figuras 2 e 7, quando comparamos suas inversas* sen *e* arctg.

Exemplo 7. *Quais os valores de* $\arccos(-1/2)$ *e* $\mathrm{arctg}(1)$*? Marque o ponto* $(-1/2, \arccos(-1/2))$ *no gráfico da Figura 5 e o ponto* $(1, \mathrm{arctg}(1))$ *no gráficos da Figura 7.*

Demonstração. Se $\arccos(1/2) = x$, então x é um arco tal que $\cos(x) = -1/2$ e $0 \le x \le \pi$. Como $\cos(x)$ é negativo, temos que x pertence ao segundo ou ao terceiro quadrante. Mas, como $0 \le x \le \pi$, podemos concluir que x pertence ao segundo quadrante. Observando o círculo trigonométrico abaixo, temos que $\cos(\pi - x) = -\cos(x) = 1/2$.



Por outro lado, o ângulo entre 0 e $\pi/2$ cujo cosseno é $1/2$ é $\pi/3$. Logo,

$$\pi - x = \pi/3 \implies x = \pi - \pi/3 = 2\pi/3.$$

Deixamos a cargo do leitor, marcar o ponto $(-1/2, 2\pi/3)$ na Figura 5.

Agora, vamos calcular $\mathrm{arctg}(1)$. Queremos encontrar um arco β tal que $\mathrm{tg}(\beta) = 1$ e $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. Veja que $\mathrm{tg}(\beta) = 1$ equivale a $\mathrm{sen}(\beta) = \cos(\beta)$, e sabemos que o ângulo que satisfaz isso é $\beta = \pi/4$ (que corresponde a 45 graus e nós dá um triângulo retângulo isósceles). Para finalizar, pedimos que o leitor marque o ponto $(1, \pi/4)$ no gráfico da Figura 7. Veja que o valor do ângulo em graus não deve ser considerado ao fazer isso, pois em todos os gráficos consideramos apenas medidas de arcos em radianos. □

Sugerimos que o leitor consulte a lista de exercícios anexa a esse material, pois ela aprofunda o que estudamos na primeira seção com vários exercícios resolvidos.

Problema 8. *Utilize a relação fundamental da trigonometria para mostrar que, para todo $x \in [-1, 1]$, tem-se:*

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arcsen}(x)) &= \sqrt{1-x^2}, \\ \operatorname{sen}(\arccos(x)) &= \sqrt{1-x^2}, \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Neste módulo, vimos apenas os conceitos básicos necessários para entender como as funções sec, csc, ctg, arcsen, arccos e arctg são definidas, fazendo a distinção entre inversa numérica e função inversa. Além da relação fundamental, estudada na aula anterior, existem inúmeras outras relações entre essas funções. Há várias aplicações dessas funções, tanto em Matemática como em outras ciências, que não abordamos aqui. Recomendamos que o leitor interessado continue seu estudos em Trigonometria pelas referências abaixo. Esse conhecimento será muito importante em disciplinas mais avançadas, durante o Ensino Superior.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.