Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Noções Básicas - Parte 4

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

7 de Fevereiro de 2025

Portal da Matemática
OBMEP

1 Composição de funções

Consideremos duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com o contradomínio de f coincidindo com o domínio C de g. Para cada $a \in A$, a imagem $f(a)$ pertence ao conjunto B, logo, podemos aplicar a função g a $f(a)$ para obter o elemento $g(f(a)) \in C$.

Assim fazendo para todo $a \in A$, obtemos uma função $h : A \to C$, que leva a diretamente a $g(f(a))$, ou seja, tal que $h(a) = g(f(a))$ (veja a figura 1). Diz-se que a função h resulta da *composição* das funções f e g (nessa ordem, ou seja, primeiro aplicando f, depois g); por isso, h é chamada de **função composta** de f e g, (nessa ordem).

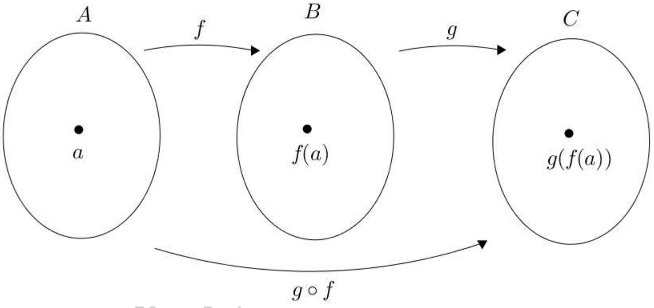

Figura 1: a função composta $g \circ f$.

Usamos a notação $h = g \circ f$ (lê-se "g bola f") para indicar a composição de f e g, nessa ordem. Com isso, observamos novamente que a ordem em que se aplicam as funções f e g na composta $g \circ f$ é dada *da direita para esquerda*, ou seja, para calcular $h(a) = (g \circ f)(a)$, aplicamos primeiro a função mais à direita, f, para obter $f(a)$, e, em seguida, aplicamos a função g a $f(a)$ para obter o elemento $h(a) = g(f(a))$.

Exemplo 1. Dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 2x - 1$

e $g(x) = -x + 4$, temos $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(2a - 1).$$

Agora, chamando momentaneamente $2a - 1$ de b, temos que $g(b) = -b + 4$, logo,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a) &= g(2a - 1) = g(b) = -b + 4\\ &= -(2a - 1) + 4 = -2a + 5.\end{aligned}$$

Exemplo 2. No exemplo anterior, veja que também poderíamos ter formado a composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou seja, aplicando primeiro g, e depois f. Nesse caso, para $a \in \mathbb{R}$, teríamos

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(-a + 4);$$

então, chamando momentaneamente $-a + 4$ de b, temos que $f(b) = 2b - 1$, logo,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(a) &= f(2a - 1) = f(b) = 2b - 1\\ &= 2(-a + 4) - 1 = -2a + 7.\end{aligned}$$

Os dois exemplos anteriores mostram que

a operação de composição de funções não é comutativa.

Isso significa que, em geral, $f \circ g \neq g \circ f$.

Bem entendido, sendo $f : A \to B$ e $g : B \to C$, podemos formar a função $g \circ f : A \to C$, mas talvez nem possamos formar a função $f \circ g$ (basta que $C \neq A$). Entretanto, ainda que seja $C = A$ (e que, portanto, também possamos formar $f \circ g$), pode ocorrer que $g \circ f \neq f \circ g$, como mostram os exemplos acima. Assim, a ordem em que se aplicam as funções é relevante para o resultado da composição.

Vejamos mais um exemplo, no qual $g \circ f \neq f \circ g$ por uma razão distinta daquela dos dois exemplos anteriores.

Exemplo 3. Se $0 \leq x \leq 1$, então $0 \leq 2x \leq 2$, logo, $1 \leq 2x + 1 \leq 3$. Portanto, podemos considerar a função $f : [0, 1] \to [0, 4]$ dada por $f(x) = 2x + 1$.

Da mesma forma, se $0 \leq x \leq 4$, então $0 \leq \frac{x}{4} \leq 1$, de modo que podemos considerar a função $g : [0, 4] \to [0, 1]$.

Veja que $f \circ g \neq g \circ f$. De fato, $f \circ g$ é uma função de $[0, 4]$ em si mesmo, ao passo que $g \circ f$ é uma função de $[0, 1]$ em si mesmo. Assim, $f \circ g \neq g \circ f$ (por exemplo, podemos calcular $(f \circ g)(2)$ mas não $(g \circ f)(2)$, uma vez que 2 não pertence ao domínio de $g \circ f$).

Apesar de não ser comutativa, a composição de funções é *associativa*. Isso significa que

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

sempre que pudermos calcular um dos dois lados (e, portanto, também o outro).

Mais precisamente, dadas funções $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, podemos considerar as funções compostas $(h \circ g) \circ f : A \to D$ e $h \circ (g \circ f) : A \to D$; além disso, para $x \in A$, temos

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\ &= h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(x),\end{aligned}$$

logo, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Para quatro ou mais funções, podemos calcular a composta de modo similar, contanto que, da direita para a esquerda, o contradomínio de cada função (que não aquela mais à esquerda) seja igual ao domínio da função imediatamente à esquerda.

Um caso particular importante é aquele de uma função $f : A \to A$. Nesse caso, podemos considerar função $f^{(n)} : A \to A$, tal que

$$f^{(n)} := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ vezes}}.$$

Assim, $f^{(1)} = f$, $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f \circ f$ etc, e o fato de a composição de funções ser associativa garante que, ao calcular a expressão para $f^{(n)}$, não precisamos nos preocupar com que composições efetuamos primeiro.

Vejamos um

Exemplo 4. Seja $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ a função dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Calcule $f(1), f^{(2)}(1), f^{(3)}(1), f^{(4)}(1)$ e $f^{(5)}(1)$.

Solução. Calculando os valores pedidos, obtemos (verifique):

$$f(1) = \frac{3}{2};$$

$$f^{(2)}(1) = f(f(1)) = f(3/2) = \frac{17}{12};$$

$$f^{(3)}(1) = f(f^{(2)}(1))) = f(17/12) = \frac{577}{408};$$

$$f^{(4)}(1) = f(f^{(3)}(1)) = f\left(\frac{577}{408}\right) = \frac{665857}{470832};$$

$$f^{(5)}(1) = f(f^{(4)}(1)) = f\left(\frac{665857}{470832}\right) = \frac{886731088897}{627013566048}.$$

□

Observação 5. Ainda em relação ao exemplo anterior, veja que $f(1) = 1,5$ e, com o auxílio de uma calculadora,

$$f^{(2)}(1) \cong 1,41666666666666;$$

$$f^{(3)}(1) \cong 1,41421568627451;$$

$$f^{(4)}(1) \cong 1,41421356237469;$$

$$f^{(5)}(1) \cong 1,414213562373095.$$

É possível provar que os números $f^{(n)}(1)$ formam uma sequência que se aproxima mais e mais de $\sqrt{2}$. Por exemplo, $f^{(4)}(1)$ é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com oito casas decimais corretas. Use uma calculadora para encontrar um valor aproximado de $\sqrt{2}$ e compare com $f^{(5)}(1)$.

Dado um conjunto não vazio A, recorde (veja o Exemplo 8 da Parte I) que a *função identidade de* A, denotada $\mathrm{Id}_A : A \to A$, é definida por $\mathrm{Id}_A(a) = a$, para todo $a \in A$.

Tal função é o *elemento neutro* da operação de composição de funções. Isso significa que, para uma função $f : A \to B$, temos $f \circ \mathrm{Id}_A = f$; realmente, $f \circ \mathrm{Id}_A : A \to B$ e

$$(f \circ \mathrm{Id}_A)(a) = f(\mathrm{Id}_A(a)) = f(a)$$

para todo $a \in A$, de forma que $f \circ \mathrm{Id}_A = f$.

Analogamente, se Id_B é a função identidade de B, então $\mathrm{Id}_B \circ f = f$, uma vez que $\mathrm{Id}_B \circ f : A \to B$ satisfaz

$$(\mathrm{Id}_B \circ f)(a) = \mathrm{Id}_B(f(a)) = f(a)$$

para todo $a \in A$.

2 A inversa de uma bijeção

Dentre todas as funções $f : A \to B$, o caso de uma bijeção é o melhor possível. Realmente, nesse caso os elementos de A e B estão em *correspondência biunívoca*, ou seja, a cada elemento de A corresponde um único elemento de B via f, e vice-versa.

Quando isso ocorre, podemos obter uma outra função $g : B \to A$, simplesmente exigindo que

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x, \qquad (1)$$

para todos $x \in A$, $y \in B$. Em termos de diagramas de setas, isso significa simplesmente que, se tivermos uma seta de x para y por f, então teremos uma seta de y para x por g.

Uma pergunta natural a esta altura é a seguinte: por que não podemos usar (1) para definir a função g no caso em que f não é uma bijeção?

Ora, se f não fosse sobrejetiva, existiria um elemento y de B que não seria imagem, por f, de nenhum elemento de A; assim, não teríamos uma maneira natural de definir $g(y)$

a partir de f. Em outras palavras, a seta partindo de y chegaria em que elemento de A?

Por outro lado, se f não fosse injetiva, então existiriam elementos distintos x_1 e x_2 de A com uma mesma imagem $y \in B$ por f; Quando tentássemos definir g por meio de f, também não haveria maneira natural de decidir qual, dentre os elementos x_1 e x_2, deveria ser igual a $g(y)$. Novamente, em termos de setas não haveria uma maneira de decidir que elemento, x_1 ou x_2, receberia a seta partindo de y.

Assim, temos a seguinte

Definição 6. *Seja $f : A \to B$ uma bijeção. A **função inversa** de f é a função $g : B \to A$ tal que, para todos $x \in A$, $y \in B$, tenhamos $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$.*

Ainda em relação à definição acima, afirmamos que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_B \,.$$

Realmente, se $x \in A$ e $y \in B$ forem tais que $f(x) = y$, então $g(y) = x$, logo, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ e $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$.

Daqui em diante, denotaremos a inversa de uma bijeção $f : A \to B$ por $f^{-1} : B \to A$. Assim,

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x). \tag{2}$$

Observe que *o expoente -1 na notação de função inversa não tem nenhum significado aritmético*; ele simplesmente chama a atenção para o fato de que f^{-1} *faz o caminho inverso de f*, isto é, aplica B em A em vez de A em B, *revertendo as setas* das associações feitas por f.

Uma questão prática importante é a seguinte: como calcular *efetivamente* a inversa de uma bijeção? Em geral, isso é mais complicado que calcular uma função composta. Contudo, para funções reais de uma variável real $f : A \to B$ (ou seja, tais que $A, B \subset \mathbb{R}$), com $f(x)$ dada por uma fórmula construída em termos de x, podemos raciocinar da seguinte maneira: fixado $y \in B$, como $f^{-1}(y) = x$ se, e só se, $f(x) =$

y, a fim obter uma expressão para $f^{-1}(y) = x$ basta resolvermos, para $x \in A$, a equação $f(x) = y$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7. Sejam a e b reais dados, sendo $a \neq 0$, e considere a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Nos Exemplos 6 e 14 da Parte II, mostramos que f é uma bijeção; calcule sua inversa.

Prova. Note inicialmente que

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

Por outro lado, (2) garante que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Comparando essas duas equivalências, concluímos que

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}.$$

□

Exemplo 8. Uma discussão análoga à do exemplo acima garante que a inversa da função identidade Id_X do conjunto $X \neq \emptyset$ é ela mesma, i.e, que $(\mathrm{Id}_X)^{-1} = \mathrm{Id}_X$.

No entanto, a inversa de uma função pode ser ela mesma sem que a função seja a identidade; um exemplo é fornecido pela função de proporcionalidade inversa $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ (a qual já sabemos que é bijetiva, pelos Exemplos 7 e 15 da Parte II). De fato, como

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y},$$

concluímos de (2) que

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{y}.$$

Em particular, $f^{-1} = f$.

Exemplo 9. Nos exemplos 8 e 16 da Parte II mostramos que a função $f : \left[\frac{1}{4}, +\infty\right) \to \left[\frac{39}{8}, +\infty\right)$, dada por $f(x) = 2x^2 - x + 5$, é uma bijeção. Calcule sua inversa.

Solução. Como nos dois exemplos anteriores,

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2x^2 - x + 5 = y \Leftrightarrow 2x^2 - x + (5 - y) = 0.$$

Essa última igualdade é uma equação do segundo grau em x, que fornece

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8(5 - y)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{8y - 39}}{4}.$$

Para ver qual dos dois valores de x devemos escolher, observe que $x = f^{-1}(y)$, com $f^{-1} : \left[\frac{39}{8}, +\infty\right) \to \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$; assim, devemos ter $x \in \left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Portanto,

$$f^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{8y - 39}}{4}.$$

□

A seguir, vamos estudar a relação entre o gráfico de uma função bijetiva real de variável real e o gráfico de sua inversa. Para tanto, comecemos com dois resultados auxiliares.

Lema 10. *O gráfico da função identidade* $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é a* ***bissetriz dos quadrantes ímpares****, isto é, a bissetriz do ângulo formado pelos eixos cartesianos e que atravessa o primeiro e o terceiro quadrantes.*

Prova. Para $a \in \mathbb{R}$, temos $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(a) = a$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Graf}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}} &= \{(a, b);\, a \in \mathbb{R} \text{ e } b = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(a)\} \\ &= \{(a, a);\, a \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Agora, por um lado, recorde que os pontos situados sobre a bissetriz de um ângulo são exatamente aqueles que equidistam dos lados desse ângulo. Por outro lado, para $a \in \mathbb{R}$, as distâncias do ponto (a, a) aos eixos das abscissas e ordenadas

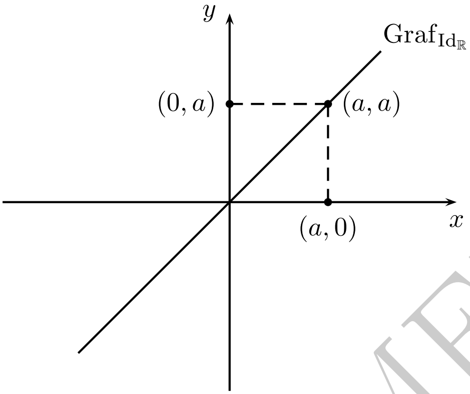

Figura 2: gráfico da função identidade $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

são iguais a $|a|$; portanto, tal ponto pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Então, o gráfico da função $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ está contido na bissetriz dos quadrantes ímpares, logo, coincide com essa reta. $\square$

Lema 11. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ distintos, os pontos $P = (a, b)$ e $Q = (b, a)$ do plano cartesiano são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.*

Prova. Suponha que $0 < b < a$ (os demais casos podem ser tradados de maneira análoga), e seja r a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Então (acompanhe na figura 3), P e Q são pontos do primeiro quadrante, com P situado no ângulo formado pelo eixo das abscissas e pela reta r, e Q situado no ângulo formado pelo eixo das ordenadas e pela reta r. Se M é o ponto médio de PQ, afirmamos que $M \in r$.

Para ver isso, note que as projeções ortogonais dos pontos P e Q sobre o eixo das abscissas são os pontos $(a, 0)$ e $(b, 0)$, respectivamente, os quais são itendificados com os reais a e b sobre esse eixo. Como o ponto médio do segmento que liga a a b corresponde ao real $\frac{a+b}{2}$, a base média do trapézio de vértices a, P, Q e b é a reta que liga M a $\frac{a+b}{2}$, e é perpendicular ao eixo das abscissas. Então, M tem abscissa $\frac{a+b}{2}$.

Raciocinando de maneira análoga com as projeções ortogonais dos pontos P e Q sobre o eixo das ordenadas, concluímos que M tem ordenada também igual a $\frac{a+b}{2}$, logo, $M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$. Pelo lema anterior, M está situado sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, isto é, $M \in r$.

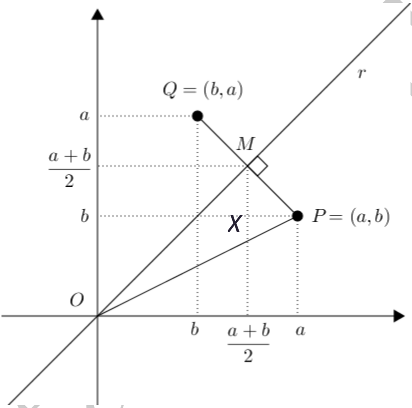

Figura 3: a reta r é a mediatriz do segmento PQ.

Resta mostrar que $PQ \perp r$. Isso é o mesmo que mostrar que o triângulo OPM é retângulo em M. Por sua vez, para provar esse fato, usaremos a recíproca do Teorema de Pitágoras: se $\overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OP}^2$, então realmente teremos $P\widehat{M}O = 90°$.

Para o que falta, apliquemos o Teorema de Pitágoras três vezes:

- O triângulo de vértices O, P e a é retângulo em a, logo, $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2$.

- O triângulo de vértices M, P e X é retângulo em X, com $\overline{PX} = a - \frac{a+b}{2} = \overline{MX}$, logo, $\overline{PM}^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

- O triângulo de vértices O, M e $\frac{a+b}{2}$ é retângulo em $\frac{a+b}{2}$, logo, $\overline{OM}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Assim,

$$\begin{aligned}\overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 &= 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(a-b)^2 + (a+b)^2}{2} \\ &= a^2 + b^2 = \overline{OP}^2.\end{aligned}$$

□

Consideremos, agora, uma bijeção $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$; então, sabemos que existe a inversa $f^{-1} : B \to A$. de f. Também, os gráficos de f e de f^{-1} são os seguintes conjuntos de pontos do plano:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x));\, x \in A\},$$

$$\text{Graf}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) \mid y \in B\}.$$

Pondo $y = f(x)$, segue de (2) que $x = f^{-1}(y)$. Portanto,

$$(x, y) \in \text{Graf}(f) \Leftrightarrow (y, x) \in \text{Graf}(f^{-1}).$$

Como, pelo lema anterior, os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, a discussão acima provou o seguinte

Teorema 12. *Se $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ é uma bijeção, então os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.*

O exemplo a seguir ilustra o uso do teorema anterior. Outros exemplos serão vistos nos exercícios.

Exemplo 13. A figura abaixo ilustra o teorema acima no caso em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a bijeção dada por $f(x) = x^3$. Nesse caso, temos

$$\text{Graf}(f) = \{(x, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Escolhendo vários valores de x (por exemplo, fazendo x variar de -3 a 3 em intervalos de comprimento $0,2$) e marcando aproximadamente os pontos correspondentes no plano cartesiano, obtemos a curva vermelha da figura 4 como esboço do gráfico de f. Traçando a curva simétrica a ela em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, obtemos o gráfico de $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

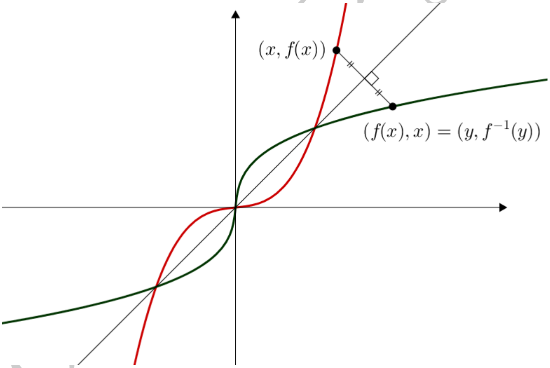

Figura 4: gráfico da bijeção f e de sua inversa f^{-1}.

Nesse caso, veja que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Assim, a curva preta é o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Dicas para o Professor

São necessários um ou dois encontros de 50 minutos cada para cobrir o material deste material. O assunto é suficientemente importante para que sejam dedicados a ele tempo e cuidado maiores.

A simetria entre os gráficos de uma função bijetiva e de sua inversa também pode ser explorada por meio de exemplos. Se for possível, use um software de geometria dinâmica, como o Geogebra, para facilitar a visualização e a manipulação das funções. Depois de experimentar bastante com exemplos, o estudante ficará mais à vontade para estudar os gráficos de funções e de suas inversas.

Este material foi parcialmente baseado no Capítulo 1 de [1]. Os capítulos 1 e 2 dessa referência, juntamente com as referências [2] e [3], contém muito mais sobre funções do que tratamos aqui. Sugerimos ao leitor consultar essas fontes como seguimento natural a estas notas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2022.
2. G. Iezzi. *Elementos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, São Paulo, 2013.
3. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*. Editora SBM, Rio de Janeiro, 1998.