Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Algébrica

Divisão e conjugado de um número complexo na forma algébrica

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de maio de 2020

1 Divisão de complexos

Dando continuidade à apresentação das operações com números complexos, trataremos agora da *divisão*. Além disso, apresentaremos a noção de *conjugado* de um número complexo.

Sejam z e w números complexos. Da mesma forma que com números reais, só podemos executar a divisão de z por w, ou seja, $\frac{z}{w}$, quando $w \neq 0$. Como sempre, z é chamado de *dividendo* e w é chamado de *divisor*. Lembre também que, quando pensamos na fração $\frac{z}{w}$, temos que z é o *numerador* e w é o *denominador*.

O caso em que o divisor, w, é um número *real* é bastante simples, pois dividir por w é o mesmo que multiplicar por $1/w$. Daí, basta usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, como no exemplo a seguir:

Exemplo 1. *Seja p o número complexo $\frac{4-3i}{2}$. Simplifique essa fração a fim de obter a parte real e a parte imaginária de p.*

Solução. Temos que:

$$\begin{aligned} p &= \frac{4-3i}{2} = \frac{1}{2}\cdot(4-3i) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 3i \\ &= 2 - \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Logo, a parte real de p é igual a 2 e a parte imaginária é igual a $-3/2$. $\square$

Outro exemplo simples se dá quando o denominador é um número imaginário puro, ou seja, um número complexo cuja parte real é igual a zero. O caso mais simples de todos é o calculo de $\frac{1}{i}$, o inverso multiplicativo de i. Um maneira de fazer isso é multiplicar o numerador e o denominador da fração por $-i$, já que $\frac{-i}{-i} = 1$. Assim fazendo, obtemos as igualdades:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = -i.$$

Resumindo, $\frac{1}{i} = -i$.

Exemplo 2. *Calcule o resultado da divisão $\frac{10-25i}{5i}$.*

Solução 1. Multiplicando tanto o numerador quanto o denominador por $-i$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{10-25i}{5i} &= \frac{(10-25i)}{5i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-10i+25i^2}{-5i^2} \\ &= \frac{-10i-25}{5} = \frac{-10i}{5} - \frac{25}{5} \\ &= -2i-5 = -5-2i. \end{aligned}$$

Este número possui parte real igual a -5 e parte imaginária igual a -2. $\square$

Solução 2. Vamos usar que $\frac{1}{i} = -i$. Assim, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{10-25i}{5i} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{i}\cdot(10-25i) = \frac{1}{5}\cdot(-i)\cdot(10-25i) \\ &= \frac{-i}{5}\cdot(10-25i) = \frac{-i}{5}\cdot 10 + \frac{-i}{5}\cdot(-25i) \\ &= \frac{-10i}{5} + \frac{25i^2}{5} \\ &= -2i-5 = -5-2i, \end{aligned}$$

como na solução anterior. $\square$

Agora, como podemos lidar com divisões em que o divisor não é um número real nem um imaginário puro? Por exemplo, considere o problema de calcular as partes real e imaginária de

$$r = \frac{2-3i}{4+5i}. \tag{1}$$

O que faremos para colocar o número complexo r em forma algébrica é um truque clássico. Como o denominador é $4+5i$, vamos começar multiplicando tanto o numerador quanto o denominador por $4-5i$, com o intuito de obter uma fração de mesmo valor mas na qual o novo denominador seja um número real. O número $4-5i$ é justamente o que chamaremos de *conjugado* de $4+5i$. Isso reduzirá o problema da divisão ao caso mais simples, visto no início da aula. Temos que:

$$r = \frac{2-3i}{4+5i} = \frac{2-3i}{4+5i}\cdot\frac{4-5i}{4-5i}.$$

Isso não altera o valor de r, já que $\frac{4-5i}{4-5i} = 1$. Agora, podemos calcular o novo numerador usando a distributividade, juntamente com o fato de que $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} (2-3i)(4-5i) &= \overset{(1)}{8} - \overset{(2)}{10i} - \overset{(3)}{12i} - \overset{(4)}{15} \\ &= -7-22i. \end{aligned}$$

Para o cálculo do denominador, também poderíamos usar a distributividade, mas é mais fácil usar o seguinte produto notável: $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$. Logo,

$$(4+5i)(4-5i) = 4^2-(5i)^2 = 16-25i^2 = 16+25 = 41,$$

de sorte que

$$r = \frac{-7-22i}{41} = \frac{-7}{41} - \frac{22}{41}i. \tag{2}$$

Com isso, concluímos que a parte real de r é igual a $-7/41$ e a parte imaginária é $-22/41$.

O fato de termos obtido um número real no denominador não é mera coincidência. Verificaremos na seção seguinte que este método sempre funciona para o cálculo da divisão (por um complexo não nulo). Antes disso, façamos outras ponderações.

De forma geral, digamos que $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com a e b reais, e w é um complexo não nulo qualquer. Temos que

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{w} = \frac{1}{w}(a + bi)$$

e que a propriedade distributiva continua sendo válida como segue:

$$\frac{1}{w}(a + bi) = \frac{a}{w} + \frac{b}{w}i.$$

O problema é que, apesar do último número obtido ser igual a z/w, quando w não é real os números a/w e b/w também não são reais. Por isso, a/w não é a parte real do número z/w e nem b/w é sua parte imaginária. Por exemplo, apesar de ser correto escrever o número r da equação (1) na forma

$$r = \frac{2}{4 + 5i} - \frac{3}{4 + 5i}i, \tag{3}$$

não há benefício em fazer isso, uma vez que ainda permanece o problema de calcular $2/(4 + 5i)$, que não é um número real e, portanto, não é a parte real de r. Da mesma forma, $-3/(4 + 5i)$ não representa a parte imaginária de r. De certa forma, temos uma expressão que é mais complicada do que a expressão original para r. Por isso, a solução anterior, usando o conjugado, foi necessária.

Além disso é importante lembrar que, assim como com números reais, não podemos "separar" uma soma (ou subatração) que se encontra no denominador. Logo,

$$\frac{2}{4 + 5i} \neq \frac{2}{4} + \frac{2}{5i}.$$

De forma mais geral, via de regra temos

$$\frac{1}{x + y} \neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

exceto para alguns valores bem específicos de complexos x e y que resolvem tal equação (veja o Exemplo 13).

Um *erro bastante comum* seria dizer que $\frac{2-3i}{4+5i}$ é igual a $\frac{2}{4} - \frac{3}{5}i$, o que também não é válido. A propriedade distributiva não pode ser aplicada dessa maneira, pois só pode ser aplicada da multiplicação para a adição.

Exemplo 3. *Calcule o resultado da divisão* $\frac{3}{3-i\sqrt{2}}$.

Solução. Como o denominador é igual a $3 - i\sqrt{2}$, vamos multiplicar o numerador e o denominador da fração por $3 + i\sqrt{2}$. O resultado é:

$$\begin{aligned}\frac{3}{3 - i\sqrt{2}} &= \frac{3}{3 - i\sqrt{2}} \cdot \frac{3 + i\sqrt{2}}{3 + i\sqrt{2}} = \frac{9 + 3i\sqrt{2}}{3^2 - (i\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{9 + 3i\sqrt{2}}{9 - i^2\,(\sqrt{2})^2} = \frac{9 + 3i\sqrt{2}}{9 - (-1)2}\\ &= \frac{9 + 3i\sqrt{2}}{11} = \frac{9}{11} + \frac{3\sqrt{2}}{11}i.\end{aligned}$$

□

Observação 4. *Talvez o leitor recorde que um truque quase idêntico é utilizado para o que chamamos de "racionalizar" o denominador de certas frações. Considere uma fração de números reais, p/q, onde q é um número irracional da forma $q = a + b\sqrt{c}$ com a, b e c racionais. Podemos obter uma fração de igual valor, mas com denominador racional, multiplicado o numerador e o denominador da fração original por $a - b\sqrt{c}$:*

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{a + b\sqrt{c}} \cdot \frac{a - b\sqrt{c}}{a - b\sqrt{c}} = \frac{p(a - b\sqrt{c})}{a^2 - (b\sqrt{c})^2} = \frac{ap - bp\sqrt{c}}{a^2 - b^2c}.$$

Problema 5. *Calcule o valor de $\frac{1}{4+5i}$, seguindo os mesmos passos do Exemplo 3. Use isso para obter $\frac{2}{4+5i}$ e $\frac{3}{4+5i}$. Substitua os valores obtidos na equação (3) e a simplifique para obter r. Verifique este valor é igual ao que obtivemos na equação (2).*

2 Conjugação

Não, isso não é uma aula sobre a gramática dos números complexos. ☺ Entretanto, é assim que chamamos o processo de calcular o conjugado de um número complexo.

Seja $z = a + bi$ um número complexo, em que a e b são reais. Definimos o **conjugado** de z, denotado $\overline{z}$, por:

$$\overline{z} = a - bi.$$

Exemplo 6. *Calcule o conjugado de cada um dos complexos nos itens abaixo:*

(i) $v = 6 - 5i$.

(ii) $w = -3 + 4i$.

(iii) $x = 2i$.

(iv) $y = 2i + 1$.

(v) $z = 4$

Solução. Para cada número devemos inverter o sinal de sua parte imaginária e manter sua parte real. Assim, temos: (i) $\overline{v} = 6 + 5i$; (ii) $\overline{w} = -3 - 4i$; (iii) $\overline{x} = -2i$.

Cuidado com o item (iv): no enunciado, a parte real e a parte imaginária foram listadas na ordem oposta. A parte imaginária de y é $2i$, logo, seu conjugado é $\overline{y} = -2i + 1$. Já no item (v), temos que z é um número real. Logo, sua parte imaginária é zero e trocar 0 por -0 não altera o número. Dessa forma, $\overline{z} = 4$. □

Observando o último item do exemplo anterior, não é difícil perceber que o conjugado de qualquer número real é ele próprio. Além disso, essa propriedade é válida somente para números reais. Ou seja, para todo $z \in \mathbb{C}$, vale:

$$z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}.$$

Outro fato simples, mas relevante, é que o conjugado do conjugado de um número complexo é o número original. De fato, se $z = a + bi$, então $\overline{z} = a - bi$ e $\overline{\overline{z}} = a - (-b)i = a + bi$. Logo,

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

A técnica da seção anterior nos diz que, *para calcular a divisão de dois números complexos, devemos multiplicar tanto o numerador como o denominador pelo conjugado do denominador*. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 7. *Calcular o resultado da divisão:* $\frac{2+i}{1-i}$.

Solução. O conjugado de $1 - i$ é igual a $1 + i$. Logo, para calcular a divisão, fazemos

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i-1}{1-i^2} = \frac{1+3i}{2}.$$

□

O motivo dessa técnica funcionar é que, para qualquer número complexo não nulo, o produto dele por seu conjugado é um real não nulo, na verdade, até mesmo positivo. De fato, para $w = c + di \neq 0$, temos que:

$$w\,\overline{w} = (c+di)(c-di) = c^2 - (di)^2 = c^2 - d^2 i^2 = c^2 + d^2.$$

Como $c, d \in \mathbb{R}$, claramente $c^2 + d^2 \geq 0$. Além disso, como $c^2 \geq 0$ e $d^2 \geq 0$, a única maneira desse número ser igual a zero é quando $c = d = 0$, ou seja, $w = 0$, o que não é o caso. Logo, temos que $c^2 + d^2 > 0$.

Assim, ao multiplicar o denominador de uma fração qualquer pelo seu conjugado, obtemos como novo denominador um número real positivo. Por fim, para não alterar o valor da fração, multiplicamos também o numerador pelo mesmo valor.

Veremos no módulo "Números Complexos – Forma Geométrica", que o produto $w\,\overline{w}$ tem uma interpretação geométrica muito importante. Por conta disso, a raiz quadrada deste número é chamada de **módulo** de w e denotada por $|w|$. Assim,

$$|w| = \sqrt{w\,\overline{w}}.$$

Observe que o módulo de um número real coincide com seu valor absoluto.

3 Exercícios

Exemplo 8. *Calcule o valor de*

$$\frac{(1+2i)^2}{3+4i}$$

Solução. Começamos desenvolvendo o numerador, utilizando o produto notável $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$:

$$\begin{aligned}\frac{(1+2i)^2}{3+4i} &= \frac{1^2 + 2\cdot 1\cdot 2i + (2i)^2}{3+4i} \\ &= \frac{1+4i-4}{3+4i} = \frac{-3+4i}{3+4i}.\end{aligned}$$

Continuando, para realizar a divisão, multiplicaremos em cima e em baixo por $3 - 4i$ (o conjugado de $3 + 4i$):

$$\begin{aligned}\frac{-3+4i}{3+4i} &= \frac{-3+4i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} \\ &= \frac{-9+12i+12i+16}{3^2-(4i)^2} \\ &= \frac{7+24i}{9-(-16)} = \frac{7+24i}{25} \\ &= \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i.\end{aligned}$$

□

Exemplo 9. *Encontre todos os números complexos que têm o quadrado igual ao conjugado.*

Solução. Seja $z = a + bi$ um complexo que satisfaz a propriedade do enunciado. Então, $z^2 = \overline{z}$, o que é mesmo que:

$$(a+bi)^2 = a - bi.$$

Como $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$, temos que

$$\begin{aligned}&a^2 + 2abi - b^2 = a - bi \iff \\ &\iff (a^2 - b^2 - a) + (2ab + b)i = 0.\end{aligned}$$

Para que um número complexo seja igual a zero, é preciso que tanto sua parte real como sua parte imaginária valham zero. Com isso, temos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - a = 0, \\ 2ab + b = 0. \end{cases}$$

A segunda equação equivale a: $b(2a+1) = 0$, que só é satisfeita para $b = 0$ ou para $2a + 1 = 0$. Tratemos esses dois casos separadamente:

Caso 1: $b = 0$. Substituindo o valor de b na primeira equação do sistema, temos que $a^2 - a = 0$, logo, $a(a-1) = 0$. Daí, $a = 0$ ou $a = 1$, o que nos dá as soluções $z = 0 + 0i = 0$ ou $z = 1 + 0i = 1$.

Caso 2: $2a + 1 = 0$. Daí, $2a = -1$, ou seja, $a = -1/2$. Substituindo isso na primeira equação do sistema, temos que:

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) = 0 \implies b^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Logo, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $b = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, o que nos dá outras duas soluções: $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Com isso, encontramos (os únicos) quatro possíveis valores para z que satisfazem o enunciado. □

Exemplo 10. *Para n inteiro, quantos valores diferentes pode ter a expressão $i^n + i^{-n}$?*

Solução. Vamos simplificar a expressão do enunciado como segue:

$$\begin{aligned} i^n + i^{-n} &= i^n + \frac{1}{i^n} \\ &= \frac{(i^n)^2 + 1}{i^n} = \frac{(i^2)^n + 1}{i^n} \\ &= \frac{(-1)^n + 1}{i^n}. \end{aligned}$$

Veja que $(-1)^n$ é sempre igual a 1 ou a -1, dependendo de n ser par ou ímpar, respectivamente. Além disso, na aula passada vimos que (para n inteiro) i^n só pode ser igual a $i, -1, -i$ ou 1. Para calcular os possíveis valores de $\frac{(-1)^n+1}{i^n}$, precisamos checar algumas casos.

Caso 1: n é impar. Neste caso, $(-1)^n = -1$, logo, $(-1)^n + 1 = 0$. Então, independentemente do valor de i^n, temos

$$\frac{(-1)^n + 1}{i^n} = 0.$$

Caso 2: n é par. Neste caso, $(-1)^n = 1$ e o valor do numerador é $(-1)^n + 1 = 2$. Resta ver os possíveis valores do denominador, i^n. Mas lembre que n precisa ser par, logo ele deve ser da forma $4k$ ou $4k + 2$ para algum k inteiro. No primeiro caso, temos que $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$ e, assim,

$$\frac{(-1)^n + 1}{i^n} = \frac{2}{1} = 2.$$

Já no segundo caso, $i^n = i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Logo,

$$\frac{(-1)^n + 1}{i^n} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Concluímos que há três possíveis valores para a expressão do enunciado, a saber: 0, 2 e -2. □

Exemplo 11. *Resolva o sistema de equações abaixo, onde z e w são números complexos:*

$$\begin{cases} z + wi = i, \\ iz + w = 2i - 1. \end{cases}$$

Solução. Multiplicando a primeira equação por i, obtemos:

$$(z + wi)i = i^2 \implies iz - w = -1.$$

Temos agora um sistema equivalente ao original:

$$\begin{cases} iz - w = -1, \\ iz + w = 2i - 1. \end{cases}$$

Somando as duas equações desse sistema, obtemos

$$2iz = 2i - 2,$$

de modo que

$$z = \frac{2i - 2}{2i} = \frac{2i}{2i} - \frac{2}{2i} = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i.$$

Por fim, basta substituir o valor de z em uma das equações anteriores, a fim de encontrar o valor de w. Fazendo tal substituição na segunda equação do sistema do enunciado, obtemos:

$$i(1 + i) + w = 2i - 1 \implies i - 1 + w = 2i - 1 \implies w = i.$$

□

Exemplo 12. *Prove que para todo complexo z, a parte real é igual a $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e a parte imaginária é igual a $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.*

Solução. Seja $z = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que $\overline{z} = a - bi$. Portanto $z + \overline{z} = (a + \cancel{bi}) + (a - \cancel{bi}) = 2a$ e, daí,

$$a = \frac{z + \overline{z}}{2}.$$

A segunda parte é análoga: temos que $z - \overline{z} = (\cancel{a} + bi) - (\cancel{a} - bi) = 2bi$. Logo,

$$b = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

□

Exemplo 13. *Encontre todos os números complexos não nulos x e y que satisfazem a equação*

$$\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Solução. Simplificando a equação do enunciado temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\iff \frac{1}{x+y} = \frac{y+x}{xy} \\ &\iff xy = (x+y)^2 \\ &\iff xy = x^2 + 2xy + y^2 \\ &\iff x^2 + xy + y^2 = 0. \end{aligned}$$

Há varias maneiras de se resolver essa última equação. Por exemplo, podemos "fingir" que y é conhecido e resolver a equação como uma equação de segundo grau na variável x, pela fórmula de Bháskara. Deixaremos essa saída como exercício e prosseguiremos de outra maneira.

Como $y \neq 0$, podemos dividir ambos os lados por y^2, a fim de obter a equação equivalente:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{xy}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{0}{y^2} \iff \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 = 0$$

Fazendo $z = x/y$, temos que:

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

Esta equação possui discriminante

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3,$$

logo, não possui raiz real, mas possui duas raízes complexas:

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Uma vez que $x = zy$, concluímos que:

$$x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} y \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} y.$$

Logo, a equação possui infinitas soluções. □

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 min. O objeto é apresentar como simplificar o resultado da divisão entre dois números complexos. Para isso, introduz-se a noção de conjugado, que também é importante por outras razões, as quais serão estudadas futuramente. Consideramos interessante iniciar com vários exemplos numéricos, mas eventualmente exibir o caso geral e sua justificativa. Mais detalhes do que exploramos aqui podem ser obtidos nas referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em Inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.