Material Teórico - Módulo de Geometria das Transformações Lineares

Transformações Lineares no $\mathbb{R}^2$ - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

09 de Outubro de 2021

Portal da Matemática
OBMEP

Dados dois espaços vetoriais U e W, as aplicações relevantes $T : U \to W$ são aquelas que preservam as operações de espaço vetorial. Estudaremos tais aplicações nessa aula, com ênfase no caso particular em que $U = W = V$, sendo V o espaço dos vetores do plano.

1 Transformações Lineares

Definição 1. *Dizemos que uma transformação $T : U \to W$ é* linear *se:*
1) T preserva a soma - $T(u + v) = T(u) + T(v)$, quaisquer que sejam os vetores $u, v \in U$.
2) T preserva o produto por escalar - $T(l \cdot u) = l \cdot T(u)$, para qualquer vetor $u \in U$ e para qualquer escalar $l \in \mathbb{R}$.

Um exemplo trivial de transformação linear é a aplicação identicamente nula $\mathcal{O} : U \to W, \mathcal{O}(u) = 0$, para cada $u \in U$. E a identidade, num espaço vetorial qualquer, também é uma aplicação linear. Agora, se T é uma transformação linear arbitrária, temos $T(0) = T(0+0) = T(0)+T(0)$, de modo que $T(0) = 0$. Em particular, dado um vetor $v \neq 0$, a translação $T_v : V \to V$, $T_v(u) = u + v$, *não* é linear.

Estamos interessados em aplicações lineares $T : V \to V$ ou, equivalentemente, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2. *Fixe um número real $k \neq 0$. A* homotetia *de razão k é a transformação $T_k : V \to V$ definida por $T_k(v) = k \cdot v, v \in V$. As propriedades das operações com vetores nos dizem que T_k é uma transformação linear, pois*

$$\begin{aligned} T_k(u + v) &= k \cdot (u + v) \\ &= k \cdot u + k \cdot v \\ &= T_k(u) + T_k(v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_k(l \cdot u) &= k \cdot (l \cdot u) \\ &= (kl) \cdot u \\ &= l \cdot (k \cdot u) \\ &= l \cdot T_k(u). \end{aligned}$$

Se considerarmos T_k como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, teremos $T_k(x,y) = (kx,ky)$.

2 Homotetias e Dilatações

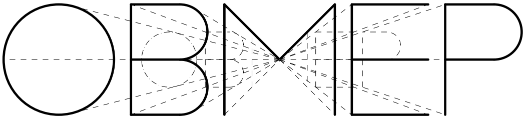
Lembre que, fixado um ponto O no plano Π, toda aplicação $T : \Pi \to \Pi$ origina uma aplicação $T^V : V \to V$, e vice-versa. A fórmula que relaciona T e T^V é $T^V(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OT(P)}$, $P \in \Pi$. Assim, podemos definir a *homotetia de centro em O e razão $k \in \mathbb{R}^*$* como a única aplicação $T_{O,k} : \Pi \to \Pi$ satisfazendo $(T_{O,k})^V = T_k$. Mais explicitamente, $T_{O,k}(P) = O + k \cdot \overrightarrow{OP}$, nas notações do módulo anterior, isto é, $\overrightarrow{OT_{O,k}(P)} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.

Por exemplo, suponha dada uma figura no plano, visualizada através de um arquivo pdf. Se desejamos aumentar

a figura, clicamos num ponto dela (no caso, o vértice intermediário da letra M) e solicitamos um "zoom" de 200%, digamos (veja a próxima página). Então, a figura agora visualizada nada mais é do que a figura inicial transformada pela homotetia de centro no ponto clicado e razão 2. Dessa forma, grosso modo, homotetias de razão positiva correspondem a zooms, de ampliação se a razão é maior que 1, ou de redução caso a razão seja menor que 1.

E se a razão for negativa?

A homotetia de centro em O e razão -1 também é chamada de *simetria em torno do ponto O*: para qualquer ponto P no plano, O é o ponto médio do segmento de extremos P e $T_{O,-1}(P)$. Verifica-se sem dificuldades que uma simetria é



uma isometria do plano (veja a aula anterior). Em resposta

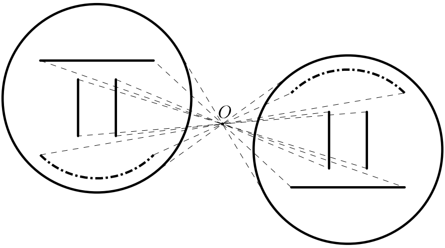


Figura 1: A figura à direira é a imagem da figura à esquerda pela simetria de centro em O.

à pergunta acima, uma homotetia de razão negativa $T_{O,k}$ é a composta da homotetia de razão positiva $T_{O,|k|}$ com a simetria em torno do ponto O.

Note que, como $T_l \circ T_k = T_{lk}$ e $T_1 = Id$, cada homotetia $T_k : V \to V$ é uma bijeção cuja inversa é a homotetia $T_{1/k}$. Valem afirmações análogas para homotetias do plano de centro num ponto fixado O.

Observação 3. *Como podemos verificar facilmente da definição (e como sugerido pelas figuras anteriores), uma homotetia $T_{O,\,k}$ transforma retas em retas. Se r é uma reta* *passando por O, então $T_{O,k}(r) = r$. Se $O \notin r$, $T_{O,k}(r)$ e r são retas de mesma direção e $|k-1|$ é a distância entre essas retas. Daí segue que homotetias preservam paralelismo e perpendicularismo: $r//s$ (resp. $r \perp s$) $\Rightarrow T_{O,k}(r)//T_{O,k}(s)$ (resp. $T_{O,k}(r) \perp T_{O,k}(s)$).*

Exemplo 4. *Sejam ABC um triângulo e MNP o seu* triângulo medial, *em que M,N e P são os pontos médios dos lados BC,CA e AB, respectivamente. Agora, o fato do baricentro G dividir cada mediana na razão $2:1$, a partir de cada vértice, pode ser enunciado afirmando-se que MNP é a imagem de ABC pela homotetia $h = T_{G,-\frac{1}{2}}$, de centro em G e razão $-\frac{1}{2}$. Da observação anterior, as alturas de ABC são transformadas por h nas alturas de MNP. Portanto, h leva o ortocentro H de ABC no ortocentro de MNP. Como as alturas de MNP coincidem com as mediatrizes dos lados de ABC, concluímos que o ortocentro de MNP é o circuncentro O de ABC, isto é, $h(H) = O$. Assim, $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{GH}$, ou ainda, $\overrightarrow{GH} = 2\cdot\overrightarrow{OG}$. Daí, O,G e H estão alinhados e G divide o segmento HO na razão $2:1$ (vide Exemplo 24 da aula anterior).*

Considere uma homotetia $T = T_{O,k}$. Dados $P,Q \in \Pi$, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T(P)T(Q)} &= \overrightarrow{T(P)O} + \overrightarrow{OT(Q)}\\ &= k\cdot\overrightarrow{PO} + k\cdot\overrightarrow{OQ}\\ &= k\cdot\overrightarrow{PQ}.\end{aligned} \tag{1}$$

Em particular, $\overline{T(P)T(Q)} = |k|\overline{PQ}$. Daí segue que *uma homotetia transforma círculos em círculos.* Mais precisamente

Proposição 5. *A homotetia T de razão k transforma o círculo de centro em A e raio R no círculo de centro $T(A)$ e raio $|k|R$.*

Demonstração. Sejam C,C' os círculos de centros em $A,T(A)$ e raios $R,|k|R$, respectivamente. Queremos mostrar que

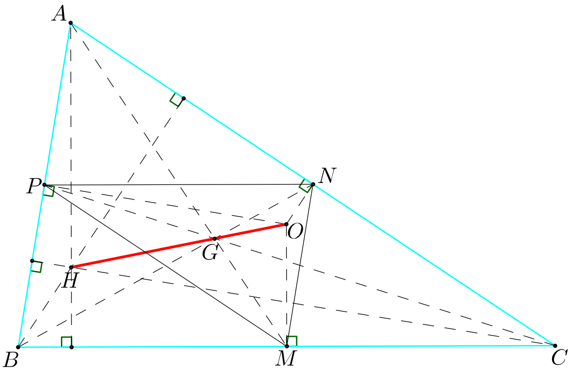


Figura 2: O, G e H estão alinhados.

$T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. Ora, $P \in \mathcal{C} \Rightarrow \overline{T(A)T(P)} = |k|\overline{AP} = |k|R$, ou seja, $T(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$. Reciprocamente, dado $Q \in \mathcal{C}'$, tome $P \in \Pi$ satisfazendo $T(P) = Q$ (lembre que homotetias são bijetivas). Assim, $|k|R = \overline{T(A)T(P)} = |k|\overline{AP} \Rightarrow \overline{AP} = R$, isto é, $P \in \mathcal{C}$. Isso mostra que $\mathcal{C}' \subset T(\mathcal{C})$ e nos permite concluir a igualdade desejada $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. $\square$

Exemplo 6. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ círculos de raios distintos R e R'. Se as tangentes externas a esses dois círculos se intersectam em O, então a homotetia de centro em O e razão $k = \frac{R'}{R}$ transforma $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$. Dizemos que O é o* centro direto de homotetia *de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$. Analogamente, se as tangentes internas se encontram em O', então a homotetia de centro em O' e razão $k = -\frac{R'}{R}$ também transforma $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}'$. Chamamos O' de* centro inverso de homotetia *dos círculos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.*

Exemplo 7. *Sejam $\mathcal{C}$ um círculo, $O \in \mathcal{C}$ e k um número real positivo. Se $X \in \mathcal{C}$, determine o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que O,P e X são colineares e $\overline{OP} = k\overline{OX}$, quando X varia em $\mathcal{C}$.*

Solução. O lugar geométrico requerido $\mathcal{L}$ é a reunião de dois círculos $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$, a saber, as imagens de $\mathcal{C}$ pelas homotetias

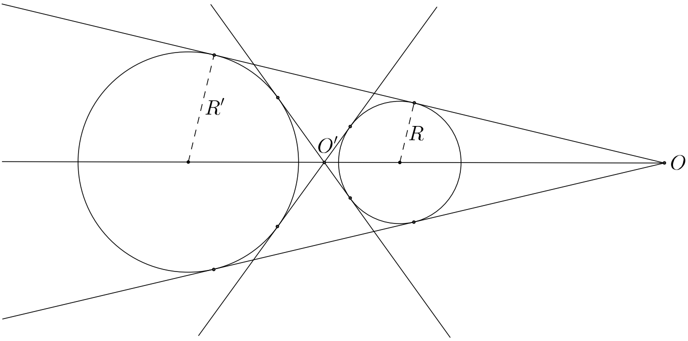


Figura 3: Os centros direto e inverso de homotetia de dois círculos.

de centro em O e razões k e $-k$. De fato, a definição de homotetia nos garante que $C' \cup C'' \subset \mathcal{L}$. Reciprocamente, seja $P \in \mathcal{L}$, ou seja, existe um ponto $X \in C$ tal que O,P e X são colineares e $\overline{OP} = k\overline{OX}$. Sejam P' e P'' as imagens de X em C' e C''. Ora, como P' e P'' são pontos distintos da reta $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overline{OP'} = \overline{OP''} = \overline{OP}$, só pode ser $P = P'$ ou $P = P''$. Portanto, $\mathcal{L} \subset C' \cup C''$ e a igualdade $\mathcal{L} = C' \cup C''$ fica estabelecida. $\square$

Já sabemos que translações e homotetias transformam retas em retas, preservando a direção. Reciprocamente

Teorema 8. *Toda bijeção do plano que transforma retas em retas, preservando a direção, é uma translação ou uma homotetia.*

Faremos algumas observações antes de iniciar a demonstração. Seja $T : \Pi \to \Pi$ uma aplicação qualquer. Um ponto $P \in \Pi$ satisfazendo $T(P) = P$ chama-se um *ponto fixo* de T. Como uma translação, distinta da identidade, não possui pontos fixos, e o centro de uma homotetia é um ponto fixo dessa homotetia, dividiremos a prova do teorema em casos, conforme T admita ou não pontos fixos.

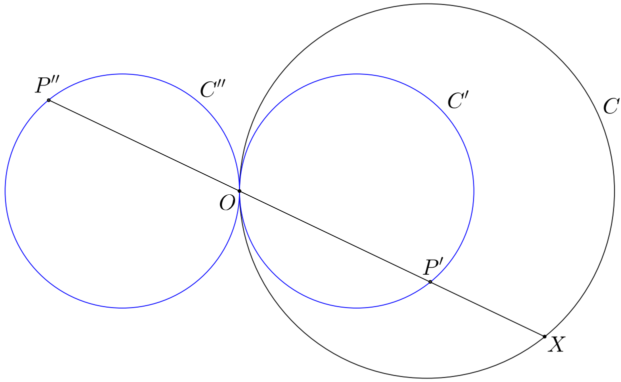


Figura 4: O LG do Exemplo 7.

Se agora $T : \Pi \to \Pi$ é uma aplicação satisfazendo as condições do teorema anterior, valem:
1. Se $T(P) \neq P$, então a reta r passando por P e $T(P)$ fica invariante por T, ou seja, $T(r) = r$.
2. Se $T(P) = P$, toda reta que passa por P fica invariante por T.
De fato, $T(r)$ tem a mesma direção que r e $T(P) \in r, T(r)$.

Demonstração do Teorema (8)**. 1º Caso**: T não admite pontos fixos.
Fixe um ponto $A \in \Pi$ arbitrariamente, tome $B = T(A)$ e defina $v = \overrightarrow{AB}$. Afirmamos que $T = T_v$, a translação definida pelo vetor v. Considere a reta $s = \overleftrightarrow{AB}$ e seja P um ponto do plano fora dessa reta. Se $Q = T(P)$ e $t = \overleftrightarrow{PQ}$, as retas s e t devem ser paralelas. Com efeito, caso fosse $\{R\} = s \cap t$, $T(R)$ seria um ponto das retas $T(s) = s$ e $T(t) = t$ (propriedade 1), ou seja, teríamos $T(R) = R$, contrariando a hipotése. Como $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$ também são paralelas (pois a última é a imagem da primeira por T), $APQB$ é um paralelogramo. Assim, $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$, de onde segue que $T(P) = T_v(P)$,

para todo $P \notin s$. Repetindo o argumento com uma reta $r//s$, concluiremos que $T(P) = T_v(P)$, para todo $P \notin r$, ou melhor, $T = T_v$.

2º caso: T admite um ponto fixo O, i.e., $T(O) = O$.
Como antes, sejam $A \in \Pi, A \neq O$, e $B = T(A)$. Da 2ª propriedade acima, podemos escrever $\overrightarrow{OB} = k \cdot \overrightarrow{OA}$, para algum número real não nulo k. Afirmamos que $T = T_{O,k}$. Basta mostrar que $I := T_{O,1/k} \circ T$ é a identidade. Perceba que $I(O) = O$ e $I(A) = A$. Se $s = \overleftrightarrow{OA}$ e $P \notin s$ é um ponto do plano, considere as retas $o = \overleftrightarrow{OP}$ e $a = \overleftrightarrow{AP}$. Como I tem as mesmas propriedades de T enunciadas no teorema, $I(o) = o$ e $I(a) = a$. Daí, P e $I(P)$ são pontos das retas distintas a e o, ou seja, $I(P) = P$ se $P \notin s$. Raciocinando agora com uma reta $r \neq s$ passando por O, teremos $I(P) = P, \forall\, P \notin r$ e, portanto, $I(P) = P$ para todo P, como queríamos. $\square$

Seguindo o artigo [2], dizemos que $T : \Pi \to \Pi$ é uma *dilatação* se T é uma translação ou uma homotetia. Pelo que já produzimos, podemos enunciar o seguinte resultado.

Corolário 9. *Uma bijeção T do plano é uma dilatação se, e somente se, T transforma retas em retas, preservando a direção.*

Daí não é difícil ver que a composta de dilatações ainda é uma dilatação (observe também o argumento abaixo).

Seja T uma dilatação do plano. Por (1), vale $\overrightarrow{T(P)T(Q)} = c\overrightarrow{PQ}$, para quaisquer pontos P,$Q \in \Pi$, em que $c = 1$ se T é uma translação ou, caso contrário, c é a própria razão da homotetia T. De todo modo, diremos que c é a *razão* da dilatação T.

Se T' e T'' são dilatações de razões c' e c'', respectivamente, e $T = T'' \circ T'$, então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T(P)T(Q)} &= \overrightarrow{T''(T'(P))T''(T'(Q))}\\ &= c''\overrightarrow{T'(P)T'(Q)}\\ &= c''c'\overrightarrow{PQ},\end{aligned}$$

ou seja, $c''c'$ é a razão da dilatação T.

O leitor poderá justificar a seguinte generalização da observação anterior: se T_1,$T_2, \ldots$,T_n são dilatações de razões c_1,$c_2, \ldots$,c_n, então a dilatação $T_n \circ \cdots \circ T_2 \circ T_1$ tem razão igual ao produto $c_1 c_2 \cdots c_n$.

As observações anteriores serão úteis para os resultados da próxima seção.

3 Algumas Aplicações

Exemplo 10 (Teorema de Menelaus). *Seja ABC um triângulo. Se $D \in \overleftrightarrow{BC}, E \in \overleftrightarrow{CA}$ e $F \in \overleftrightarrow{AB}$ são pontos distintos dos vértices, então D, E e F são colineares se, e somente se,*

$$\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB} = -1. \tag{2}$$

Aqui, $\frac{XY}{YZ}$ denota a razão orientada dos segmentos colineares XY e YZ, ou seja, $\overrightarrow{XY} = (\frac{XY}{YZ}) \cdot \overrightarrow{YZ}$.

Solução. Suponha que D,E e F sejam colineares. Seja T_D a homotetia de centro em D que leva o ponto C em B, de forma que $\frac{DB}{DC}$ é a razão de T_D. Definimos de forma similar as homotetias T_E, de centro em E e razão $\frac{EC}{EA}$, e T_F de centro em F e razão $\frac{FA}{FB}$. Perceba que T_F leva B em A, ao passo que T_E leva A no ponto C. Agora considere a dilatação $T = T_E \circ T_F \circ T_D$. Então $T(C) = C$, isto é, T deve ser uma homotetia de centro em C. Por outro lado, se r é a reta que passa por D,E e F, então r é invariante pelas homotetias T_D,T_E e T_F, de onde segue que r também é invariante por T. Como $C \notin r$, conclui-se que T é a identidade. Pelas observações feitas ao final da seção anterior, vale $\frac{EC}{EA}\frac{DB}{DC}\frac{FA}{FB} = 1$, o que demonstra a primeira parte do resultado.

Reciprocamente, suponhamos que a relação (2) se verifique. Então, nas notações do parágrafo anterior, $T_E \circ T_F \circ T_D$ é a identidade. Em particular, $T_E(T_F(D)) = D$, isto é, pondo

$G = T_F(D)$, vale $T_E(G) = D$. Assim, E,G e D são colineares, assim como F,D e G são colineares. Segue o resultado.

$\square$

Exemplo 11 (Teorema de Monge). *Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ círculos e X, Y, Z os centros diretos de homotetia dos pares* $(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3)$, $(\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_1)$, *respectivamente (veja o Exemplo* (6)*). Então, X, Y e Z são colineares.*

Solução. Utilizaremos a mesma ideia empregada no exemplo anterior. Com efeito, sejam T_X,T_Y e T_Z as homotetias que transformam $\mathcal{C}_1$ em $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_3$ em $\mathcal{C}_1$, respectivamente (vide Exemplo (6)). Então, a dilatação $T = T_Z \circ T_Y \circ T_X$ deixa o círculo $\mathcal{C}_1$ invariante. Em particular, se O é o centro de $\mathcal{C}_1$, devemos ter $T(O) = O$. Portanto, T deve ser uma homotetia, de razão positiva uma vez que são positivas as razões de T_X,T_Y e T_Z. Pela Proposição (5), a razão de T é igual a 1, ou seja, T é a identidade. Assim, o argumento ao final da 2ª parte da solução do exemplo anterior nos permite concluir que X,Y e Z são colineares. $\square$

Exemplo 12. *Considere um círculo $\mathcal{C}$ e uma corda AB desse círculo. Se $\mathcal{C}'$ é um círculo tangenciando $\mathcal{C}$ em P e tangenciando AB em Q, mostre que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ passa pelo ponto médio do arco $\overset{\frown}{AB}$ que não contém P.*

Solução. Se R e R' são os raios dos círculos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, respectivamente, a homotetia T de centro em P e razão $\frac{R}{R'}$ transforma $\mathcal{C}'$ em $\mathcal{C}$. Portanto, T também transforma a reta $\overleftrightarrow{AB}$, tangente a $\mathcal{C}'$, numa reta r que deve ser tangente a $\mathcal{C}$, num ponto M digamos. Se O é o centro de $\mathcal{C}$, sabemos que $r \perp \overleftrightarrow{OM}$. Como $r // \overleftrightarrow{AB}$, conclui-se que $\overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, ou melhor, $\overleftrightarrow{OM}$ é a mediatriz de AB. Como a mediatriz de uma corda de um círculo corta esse círculo nos pontos médios dos arcos determinados pela corda, terminamos. $\square$

Antes do próximo exemplo, uma definição. Duas figuras F e F' (subconjuntos do plano) são ditas *homotéticas* se existe uma homotetia que transforma F e F'. Por exemplo, quaisquer dois círculos são homotéticos. E também são homotéticos um triângulo e o seu triângulo medial. Mais geralmente

Exemplo 13. *Seja $P = A_1A_2 \dots A_n$ um polígono. Se G_i é o baricentro do polígono de $n-1$ lados tendo os mesmos vértices que P, exceto A_i, mostre que $Q = G_1G_2 \dots G_n$ e P são homotéticos.*

Solução. Seja G o baricentro de P (vide Exemplo 18 da aula anterior). Então,

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GA_i} = 0 \tag{3}$$

e

$$\sum_{j \neq i, j=1}^{n} \overrightarrow{G_iA_j} = 0, \tag{4}$$

para cada i. Adicionando a igualdade

$$\sum_{j \neq i, j=1}^{n} \overrightarrow{GG_i} = (n-1)\overrightarrow{GG_i}$$

à igualdade (4), obtemos $\sum_{j \neq i, j=1}^{n} \overrightarrow{GA_j} = (n-1)\overrightarrow{GG_i}$. Mas, por (3), podemos escrever $\overrightarrow{GA_i} = -(n-1)\overrightarrow{GG_i}$. Portanto, a homotetia de centro em G e razão $-(n-1)$ transforma $G_1G_2 \dots G_n$ em P. □

4 Semelhanças

Consideramos na aula anterior a classe das aplicações do plano (no plano) que preservam distâncias, as chamadas *isometrias*. Uma classe mais ampla, e de extrema relevância geométrica, consiste das aplicações do plano que preservam a *forma*. Estamos falando das *semelhanças*.

Definição 14. *Diz-se que uma aplicação* $S : \Pi \to \Pi$ *é uma* <u>semelhança</u> *quando existe uma constante positiva* k *de modo que* $\overline{S(A)S(B)} = k\overline{AB}$, *quaisquer que sejam os pontos* $A,B \in \Pi$. *Nesse caso, a constante* k *é chamada de* razão *da semelhança* S.

Por exemplo, toda homotetia é uma semelhança. E isometrias nada mais são do que semelhanças de razão 1. Veja que a composta $S = S_2 \circ S_1$, de duas semelhanças S_1 e S_2, ainda é uma semelhança, sendo a razão de S igual ao produto das razões de S_1 e S_2.

O próximo resultado classifica as semelhanças do plano.

Teorema 15. *Uma aplicação* S *do plano é uma semelhança se, e somente se,* S *é a composição de uma homotetia com uma isometria.*

Demonstração. Primeiramente, se H é uma homotetia e T é uma isometria, então H e T são semelhanças, de onde segue que $T \circ H$ também é uma semelhança. Reciprocamente, seja S uma semelhança de razão k. Se H é uma homotetia qualquer de razão k, sabemos que H^{-1} é uma homotetia de razão $1/k$, e daí $T := S \circ H^{-1}$ deve ser uma semelhança de razão 1, ou seja, T é uma isometria. Sendo $S = T \circ H$, terminamos. $\square$

Corolário 16. *Sejam* ABC *e* $A'B'C'$ *triângulos no plano. Então,* ABC *e* $A'B'C'$ *são semelhantes se, e somente se, existe uma semelhança* $S : \Pi \to \Pi$ *satisfazendo* $S(A) = A', S(B) = B'$ *e* $S(C) = C'$.

Demonstração. Suponha que exista uma semelhança S nas condições do enunciado. Se k é a razão de S, temos $\overline{A'B'} = \overline{S(A)S(B)} = k\overline{AB}$ e, de forma similar, $\overline{B'C'} = k\overline{BC}$ e $\overline{C'A'} = k\overline{CA}$. Portanto, pelo critério LLL, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

Reciprocamente, sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos semelhantes na razão k. Se H é uma homotetia qualquer de razão k, sejam $A'' = H(A), B'' = H(B)$ e $C'' = H(C)$. Afirmamos que $A'B'C'$ e $A''B''C''$ são congruentes. Com efeito, $\overline{A'B'} =$

$k\overline{AB}$, ao mesmo tempo em que $\overline{A''B''} = \overline{H(A)H(B)} = k\overline{AB}$, ou seja, $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$. De modo completamente análogo seguem as igualdades $\overline{B'C'} = \overline{B''C''}$ e $\overline{C'A'} = \overline{C''A''}$. Portanto, $A'B'C'$ e $A''B''C''$ são congruentes pelo critério de congruência LLL. Pelo Corolário 17 da aula anterior, existe uma isometria T que leva $A''B''C''$ em $A'B'C'$. Logo, $S = T \circ H$ é uma semelhança que transforma ABC em $A'B'C'$, c.q.d. □

Definição 17. *Dizemos que duas figuras F e F' são* semelhantes *se existe uma semelhança $S : \Pi \to \Pi$ aplicando F sobre F', isto é, $S(F) = F'$.*

Por exemplo, quaisquer dois círculos são semelhantes. Pelo corolário anterior, dois triângulos são semelhantes no sentido usual se, e só se, são semelhantes segundo a definição anterior.

Dicas para o Professor

Gostaríamos de sugerir a seguinte atividade para sala de aula: *mostre que duas parábolas quaisquer são semelhantes*. Para fixar as ideias, sejam $\mathcal{P}$ a parábola de equação $y = x^2$ e $\mathcal{P}'$ a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Completando quadrados, obtemos uma translação que transforma $\mathcal{P}'$ em $\mathcal{P}'' : y = ax^2$. Agora a homotetia (centrada na origem e) de razão $1/a$ transforma $\mathcal{P}''$ em $\mathcal{P}$.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. D. E. L. A. L. Sena. *Da Geometria Euclidiana à Geometria Projetiva: algumas aplicações de homotetias e de construções projetivas.* PROFMAT, 2017.

2. S. R. Clemens. *Fixed Points Theorems in Euclidean Geometry.* The Mathematics Teacher, vol 66, nº 4 (april 1973), pp. 324 - 330.