Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1

Retas Cortadas por uma Transversal

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

6 de fevereiro de 2016

1 Retas cortadas por uma transversal

Sejam r e s duas retas situadas em um mesmo plano, ambas concorrentes com uma reta t, como mostrado na Figura 1.

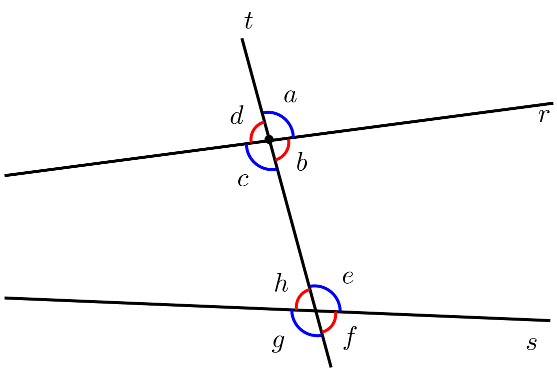


Figura 1: retas cortadas por uma transversal.

A reta t é uma reta **transversal** às retas r e s. A interseção de t com r determina os ângulos a, b, c e d da figura, ao passo que a interseção de t com s determina os ângulos e, f, g e h. Alguns pares formados por esses oito ângulos recebem denominações especiais, como veremos a seguir.

Os pares a, g e d, f são chamados **alternos externos**, enquanto os pares b, h e c, e são denominados **alternos internos**. Os pares a, f e d, g são chamados **colaterais externos**, e os pares b, e e c, h são denominados **colaterais internos**.

Destacamos, ainda, os pares a, e; b, f; c, g e d, h, chamados **ângulos correspondentes**.

Observando mais uma vez a Figura 1, note que os pares de ângulos a, c e e, g são opostos pelo vértice (OPV), logo, $c = a$ e $e = g$. Portanto, se $c = e$, então $a = c = e = g$. Daí, como d é o suplementar de c e h é o suplementar de g, temos

$$d = 180° - c = 180° - g = h.$$

Então, como acima, concluímos que $b = d = f = h$.

Mais geralmente, argumentando também como fizemos acima, temos a seguinte propriedade importante dos ângulos determinados por uma transversal:

> A congruência dos ângulos de qualquer um dos pares de ângulos alternos (ou correspondentes) acarreta a congruência dos ângulos que formam os demais pares. Se um par de ângulos colaterais (externos ou internos) é formado por ângulos suplementares, então todos os pares de ângulos alternos (ou correspondentes) são congruentes.

A igualdade das medidas dos pares de ângulos descritos acima tem uma implicação importantíssima sobre a posição relativa das retas r e s, a qual isolamos a seguir:

> Se, quando cortadas por uma reta transversal, duas retas situadas em um mesmo plano determinam um par de ângulos alternos (ou correspondentes) congruentes, então essas retas são paralelas.

Nas notações da Figura 1, como $a + b = 180°$, temos $a = e$ se, e só se, $b + e = 180°$. Isto posto, podemos refrasear o critério acima da seguinte forma equivalente, a qual também é, por vezes, bastante útil.

> No critério acima, a condição "determinam um par de ângulos alternos (ou correspondentes) congruentes" pode ser substituída por "determinam um par de ângulos colaterais suplementares".

Reciprocamente, quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, obtemos uma importante relação de congruência entre os pares de ângulos descritos acima, como mostra o resultado enunciado abaixo.

> Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma reta transversal t, então todos os pares de ângulos alternos (ou correspondentes) são formados por ângulos congruentes. Neste caso, os pares de ângulos colaterais são formados por ângulos suplementares.

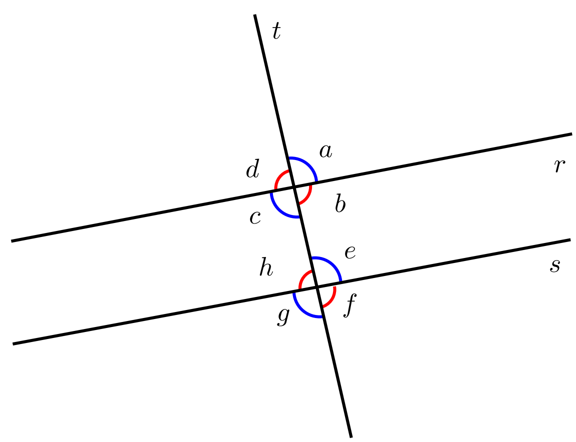
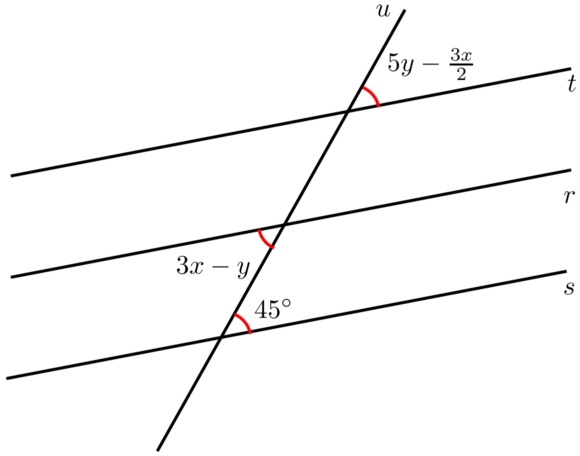


Figura 2: retas paralelas cortadas por uma transversal.

Vejamos algumas aplicações dos fatos listados acima:

Exemplo 1. *Na figura a seguir, temos $r \parallel s \parallel t$. Calcule, em graus, os valores dos ângulos x e y.*



Solução. Uma vez que os ângulos (alternos internos) que medem $3x - y$ e $45°$ são formados pelas interseções das retas paralelas r e s com a transversal u, temos

$$3x - y = 45°.$$

Analogamente, observando agora as interseções de s e t, que também são paralelas, com a reta u, obtemos

$$5y - \frac{3x}{2} = 3x - y$$

(pois esses ângulos também são alternos internos).

A primeira equação implica $y = 3x - 45°$. Substituindo esse valor de y na segunda equação, obtemos:

$$\begin{aligned}
&5(3x - 45°) - \frac{3x}{2} = 3x - (3x - 45°)\\
&\Longrightarrow 15x - 225° - \frac{3x}{2} = 3x - 3x + 45°\\
&\Longrightarrow 15x - \frac{3x}{2} = 45° + 225°\\
&\Longrightarrow \frac{27x}{2} = 270°\\
&\Longrightarrow x = 20°.
\end{aligned}$$

Daí,

$$y = 3x - 45° \Longrightarrow y = 3 \cdot 20° - 45° \Longrightarrow y = 15°.$$

□

Nossa segunda aplicação é muito importante, por fornecer um método prático para traçarmos retas paralelas.

Nos séculos IV e III a.C., ao sistematizar a geometria conhecida na antiguidade clássica, Euclides de Alexandria enunciou seu famoso **postulado das paralelas**, que afirma que, em um plano:

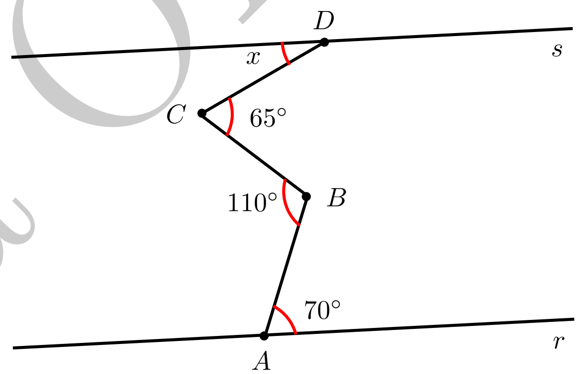
> Dados uma reta r e um ponto P, com P não pertencente a r, existe uma única reta s, paralela a r e que contém o ponto P.

Suponha, pois, que temos dados uma reta r e um ponto P, com $P \notin r$. Como a paralela a r passando por P existe e é única, para construí-la é suficiente construirmos uma reta passando por P que seja paralela a r.

Para tanto (veja a Figura **??**), começamos trançando por P uma reta qualquer t, concorrente com r. Em seguida, marcamos o ponto O, de interseção das retas r e t. Consideramos um ponto $Q \in r$, com Q diferente de O, e construímos o ângulo $\angle QPR$, congruente a $\angle POQ$ e tal que os pontos R e Q estejam situados em semiplanos distintos, dos determinados pela reta t.

A reta $s = \overleftrightarrow{RP}$ é paralela a r, pois $\angle QPR$ e $\angle POQ$ são ângulos alternos internos congruentes.

Exemplo 2. *Na figura a seguir, sabendo que $r \parallel s$, calcule a medida, em graus, do ângulo x.*



Solução. Começamos traçando pelos pontos B e C, respectivamente, retas t e u, paralelas à reta r (e, consequentemente, paralelas também à reta s – veja a figura a seguir).

Em seguida, marcamos os pontos $E \in r$, $F \in s$, $G \in t$ e $H \in u$, também conforme mostrado na figura acima. Como $t \parallel r$ e os ângulos $\angle EAB$ e $\angle ABG$ são alternos internos, temos $E\widehat{A}B = A\widehat{B}G = 70°$. Por outro lado,

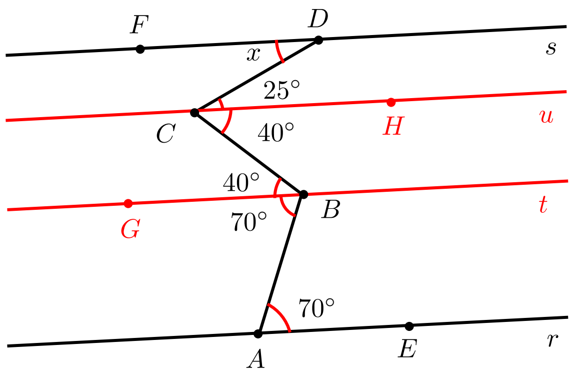
$$110° = A\widehat{B}C = A\widehat{B}G + G\widehat{B}C = 70° + G\widehat{B}C,$$

de onde obtemos $G\widehat{B}C = 40°$.

Agora, uma vez que as retas t e u são paralelas e os ângulos $\angle GBC$ e $\angle BCH$ são alternos internos, repetindo o argumento acima obtemos $40° = G\widehat{B}C = B\widehat{C}H$. Mas, como

$$65° = B\widehat{C}D = B\widehat{C}H + H\widehat{C}D = 40° + H\widehat{C}D,$$

concluímos que $H\widehat{C}D = 25°$.



Agora, notando que as retas s e u são paralelas e que os ângulos $\angle HCD$ e $\angle CDF$ são alternos internos, temos

$$x = C\widehat{D}F = H\widehat{C}D = 25^\circ.$$

$\square$

No exemplo anterior, observe que

$$E\widehat{A}B + B\widehat{C}D = 70^\circ + 65^\circ = 135^\circ$$

e

$$A\widehat{B}C + C\widehat{D}F = 110^\circ + 25^\circ = 135^\circ.$$

Repetindo o argumento utilizado, obtemos, mais geralmente, o seguinte fato, ao qual nos referiremos como o **teorema dos bicos**:

> Na Figura 3, se $r \parallel s$, então
>
> $$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

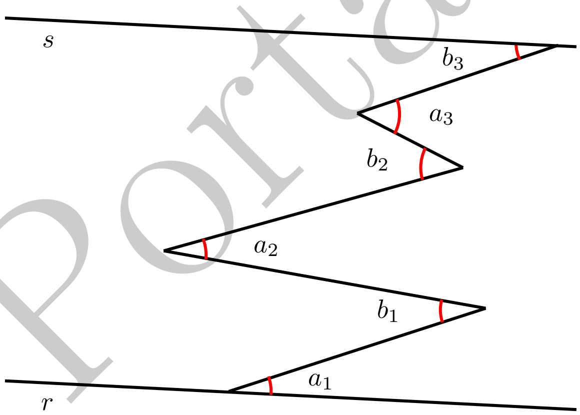
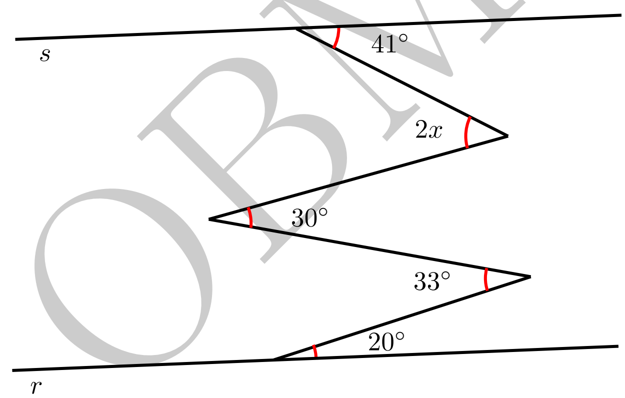


Figura 3: o teorema dos bicos.

Observe que, no exemplo 2, havia dois ângulos com vértice à esquerda e dois com vértice à direita. Por outro lado, na Figura 3, há três ângulos de cada lado. Entretanto, note que o argumento de traçar retas paralelas pelos vértices de tais ângulos nos permite concluir que a soma das medidas dos ângulos com vértices à direita é igual à soma das medidas dos ângulos com vértices à esquerda, independentemente da quantidade de tais ângulos.

O próximo exemplo ilustra uma aplicação simples do teorema dos bicos.

Exemplo 3. *Na figura abaixo, sabendo que r e s são retas paralelas, calcule o valor do ângulo x.*



Solução. Pelo teorema dos bicos, temos:

$$33^\circ + 2x = 41^\circ + 30^\circ + 20^\circ.$$

Logo,

$$2x = 91^\circ - 33^\circ = 58^\circ \Longrightarrow x = 29^\circ.$$

$\square$

2 Ângulos internos e externos de um triângulo

Dados três pontos não colineares A, B e C, o **triângulo** ABC é a união dos três segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ (veja a Figura 4). Os pontos A, B e C são os **vértices** e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os **lados** do trângulo ABC.

Dado um triângulo ABC, os ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$ são os **ângulos internos** do triângulo. Quando não houver perigo de confusão, as medidas dos ângulos internos de um triângulo ABC serão denotadas simplesmente por $B\widehat{A}C = \widehat{A}$, $A\widehat{B}C = \widehat{B}$ e $A\widehat{C}B = \widehat{C}$.

Agora, conforme mostrado na Figura 5, tomemos pontos D, E e F respectivamante sobre as semirretas $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

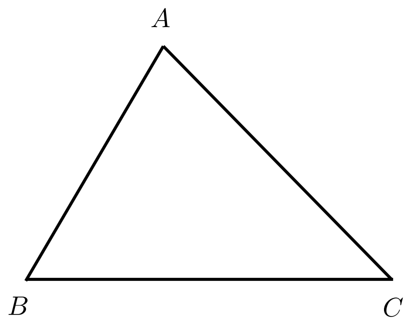


Figura 4: um triângulo ABC qualquer.

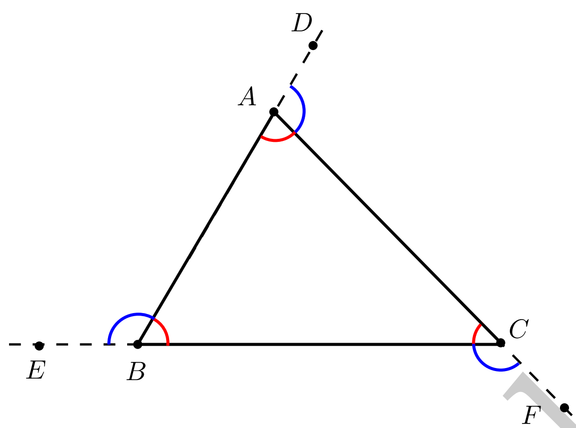


Figura 5: ângulos de triângulo qualquer.

Os ângulos $\angle DAC$, $\angle ABE$ e $\angle BCF$ são três dos **ângulos externos** do triângulo ABC. Observe que, além dos ângulos externos mostrados na Figura 5, o triângulo ABC tem outros três angulos externos, os quais são OPV aos ângulos externos mostrados naquela figura. Como exercício para o leitor, sugerimos esboçar esses outros três ângulos externos.

Dado um triângulo ABC cujos ângulos internos medem $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, considere um ponto D sobre o prolongamento do lado $\overline{AB}$, conforme mostrado na Figura 6.

Tracemos por A uma reta r, paralela ao lado $\overline{BC}$, e marquemos um ponto E sobre r, também conforme mostrado na Figura 6. Veja que as retas r e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas, os ângulos $\angle DAE$ e $\angle ABC$ são correspondentes, e os ângulos $\angle EAC$ e $\angle ACB$ são alternos internos. Daí, temos

$$D\widehat{A}C = D\widehat{A}E + E\widehat{A}C = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = \widehat{B} + \widehat{C}.$$

Podemos sintetizar a discussão feita acima no seguinte resultado:

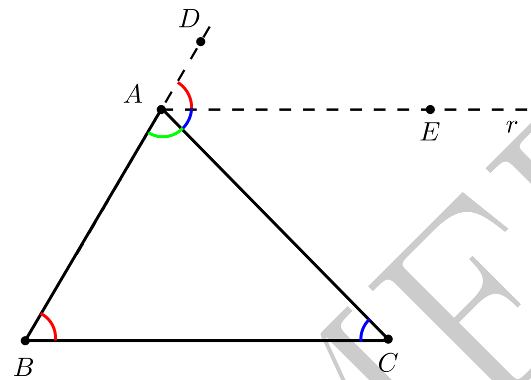


Figura 6: relação entre ângulos internos e externos.

Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo qualquer é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Uma consequência imediata, mas importantíssima, é o fato de que (nas notações da Figura 6)

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A} + D\widehat{A}C = 180°.$$

Assim, temos a seguinte propriedade dos ângulos internos de um triângulo:

Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é sempre igual a 180°.

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para discutir a Seção 1 e uma sessão de 50min para a Seção 2. Na Seção 1, ressalte que é suficiente que apenas um par de ângulos alternos (ou correspondentes) seja formado por ângulos congruentes (ou, ainda. que um par de ângulos colaterais seja formado por ângulos suplementares) para que se dê o mesmo com todos os outros pares. Na Seção 2, procure explicar intuitivamente (através de recortes com cartolina, por exemplo) os resultados que relacionam as medidas dos ângulos de um triângulo, pois isso facilitará a compreensão por parte dos alunos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
2. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, SBM, 2013.
3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana*. São Paulo, Atual Editora, 2012.