Material Teórico - Módulo de FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

Frações e Potenciação - Parte II

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autores: Profs. Bruno Holanda e Ulisses Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha

8 de Fevereiro de 2026

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Potenciação de frações

Dando continuidade a nosso estudo sobre frações, nesta aula formalizaremos as propriedades da *potenciação de frações*. Lembramos que a operação de potenciação deve ser entendida como a *abreviação de uma multiplicação de fatores repetidos*.

De maneira geral, dados um número natural n — o qual denominaremos **expoente** — e uma fração $\frac{a}{b}$ — a qual denominaresmos **base** — a **potência** $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ é o produto de n fatores iguais a $\frac{a}{b}$. Em símbolos, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n\ \text{vezes}}. \tag{1}$$

Como caso particular de (1), devemos entender uma fração elevada ao expoente 1 como sendo igual a ela mesma, ou seja,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}.$$

Exemplo 1. *Imagine um cubo cuja aresta mede $\frac{2}{3}$ de metro. A fórmula para o volume de um cubo diz que devemos calcular a potência que tem base igual a $\frac{2}{3}$ e expoente igual a 3. Utilizando a definição acima, obtemos:*

$$V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}\,m^3.$$

Note que o resultado $\frac{8}{27}$ é precisamente o cubo do numerador dividido pelo cubo do denominador.

O exemplo acima sugere a primeira e fundamental propriedade da operação de potenciação:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n\ \text{vezes}} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n\ \text{vezes}}}{\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n\ \text{vezes}}} = \frac{a^n}{b^n},$$

ou seja,

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.} \tag{2}$$

Observação 2. **Atenção aos parênteses!** É fundamental distinguir

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \quad \text{de} \quad \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Sem os parênteses, o expoente aplica-se apenas ao numerador. De modo geral, se $b, n > 1$, temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \neq \frac{a^n}{b}.$$

2 Propriedades operatórias

As propriedades que valem para potências de números naturais também se aplicam às frações. Por isso, nesta seção revisamos tais propriedades no contexto de frações.

A. Multiplicando potências de mesma base

Para ajudar a compreender como multiplicar potências de mesma base, comecemos com um exemplo numérico:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 &= \underbrace{\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right)}_{3 \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right)}_{2 \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{5 \text{ vezes}} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3+2}.\end{aligned}$$

Mais geralmente, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{m+n \text{ vezes}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}.\end{aligned}$$

Em resumo, para multiplicar potências com a mesma base, repetimos a base e **somamos** os expoentes:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}. \tag{3}$$

Observação 3. Para muitos cálculos que veremos mais adiante, é conveniente definir potências de frações com expoente zero. Como poderíamos fazer isso? Se desejarmos que a propriedade acima continue válida quando o expoente for zero, devemos ter

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{0+n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Dividindo os dois membros da igualdade $\left(\frac{a}{b}\right)^0 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ por $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, concluímos que a maneira correta de definir $\left(\frac{a}{b}\right)^0$ é fazer

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1.$$

Assim, assumimos a validade da igualdade acima como uma *definição*. Note que, com ela, (3) passa a valer para todos m e n inteiros não negativos.

B. Dividindo potências de mesma base

Novamente, iniciemos com um exemplo numérico:

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4}\right)^5 \div \left(\frac{3}{4}\right)^3 &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^5}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}\cdot\cancel{\frac{3}{4}}} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3}.\end{aligned}$$

De modo geral, quando $m > n$, temos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} &= \frac{\overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}^{m \text{ vezes}}}{\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}_{n \text{ vezes}}} \\
&= \frac{\overbrace{\cancel{\frac{a}{b}}\cdot\cancel{\frac{a}{b}}\cdots\cancel{\frac{a}{b}}}^{n \text{ vezes}}\cdot\overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}^{m-n \text{ vezes}}}{\underbrace{\cancel{\frac{a}{b}}\cdot\cancel{\frac{a}{b}}\cdot\cancel{\frac{a}{b}}}_{n \text{ vezes}}} \\
&= \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, é claro que, quando $m = n$, também temos

$$
\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}.
$$

Em resumo, ao dividirmos potências de mesma base, repetimos a base e **subtraímos** os expoentes:

$$
\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} \quad \text{se } m \geq n. \tag{4}
$$

Observação 4. Um argumento mais curto para dividir $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ por $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ quando $m > n$ é obtido quando utilizamos a propriedade A no numerador dos cálculos acima, escrevendo m como $(m-n)+n$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{(m-n)+n}}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \\
&= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}\cancel{\left(\frac{a}{b}\right)^n}}{\cancel{\left(\frac{a}{b}\right)^n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}.
\end{aligned}
$$

C. Calculando potência de potência

Como das outras vezes, antes de enunciar a regra geral, vamos analisar um exemplo numérico. Para tanto, considere a expressão

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2.$$

Nesta *potência de potência*, devemos elevar a base $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ao quadrado. Assim, temos

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Agora, utilizamos a fórmula para o produto de potências de mesma base, ou seja, conservamos a base e somamos os expoentes:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Observe que o expoente final 6 é exatamente o produto dos expoentes 2 e 3.

Mais geralmente, temos

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n &= \overbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m}^{n \text{ vezes}}\\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \text{ vezes}}}\\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}.\end{aligned}$$

Em resumo, para calcular uma potência elevada a outro expoente conservamos a base e multiplicamos os expoentes:

$$\boxed{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}.} \qquad (5)$$

Observação 5. É muito importante ter cuidado para não confundir a potenciação de uma potência com um *expoente que é uma potência*. Por exemplo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3^4} \neq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4.$$

De fato, na primeira potência, o expoente é $3^4 = 81$; por outro lado, graças a (5), o expoente da segunda potência é igual a $3 \cdot 4 = 12$.

D. Multiplicando potências de expoentes iguais

A seguir, apresentaremos a última propriedade da operação de potenciação de frações, a qual relaciona o produto de duas potências com expoente iguais.

Para calcular

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3,$$

se expandirmos as potências utilizando a definição, obtemos

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \underbrace{\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right)}_{3 \text{ vezes}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7}\right)}_{3 \text{ vezes}}$$

Como, numa multiplicação, a ordem dos fatores não altera o produto — essa é a *propriedade comutativa* da multiplicação —, podemos formar "pares" juntando uma fração $\frac{2}{5}$ com uma fração $\frac{3}{7}$ em cada par. Assim,

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right)$$

Note que, agora, temos o produto de frações $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right)$ repetido três vezes. Pela definição de potência, esse produto é o mesmo que

$$\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right)^3.$$

Mais geralmente, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n &= \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}^{n \text{ vezes}} \cdot \overbrace{\frac{c}{d} \cdot \frac{c}{d} \cdots \frac{c}{d}}^{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdots \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)}_{n \text{ vezes}} \\ &= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n.\end{aligned}$$

Assim, ao calcularmos o produto de potências com expoentes iguais, mantemos o expoente e multiplicamos as bases.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n. \tag{6}$$

Observação 6. Evidentemente uma alternativa ao raciocínio acima seria calcular cada potência separadamente e, em seguida, multiplicar os resultados. Utilizando (2) e as propriedades de potenciação de números naturais, chegamos ao mesmo valor final. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^3 &= \frac{2^3}{5^3} \cdot \frac{3^3}{7^3} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{5^3 \cdot 7^3} \\ &= \frac{(2 \cdot 3)^3}{(5 \cdot 7)^3} = \left(\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}\right)^3 \\ &= \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}\right)^3.\end{aligned}$$

O raciocínio no caso geral é exatamente o mesmo e nos leva novamente a (6).

3 Sugestões ao professor

Esta aula, apesar de ser um pouco mais técnica do que as duas primeiras, também pode ser utilizada para rever os conceitos aprendidos anteriormente. Sugerimos que, ao final da mesma e para o bem da fixação por parte dos alunos, o professor faça, a título de revisão, uma rápida listagem definição (1) e das propriedades (2) a (6).

Nesta etapa, é comum que os alunos confundam as regras de operação (por exemplo, somar versus multiplicar expoentes). Sugerimos que o professor proponha atividades que ajudem os estudantes a entenderem as propriedades e não apenas memorizarem as fórmulas. Por exemplo, o professor pode propor uma atividade do tipo "encontre o erro", na qual ele escreva uma igualdade falsa, como $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$, e peça para os estudantes identificarem e explicarem o erro, expandindo as potências $(\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4})$.

Duas sessões de 50 minutos devem ser suficientes para apresentar todo o conteúdo deste material.