Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Funções – Parte 2

Funções Pares, Ímpares e Periódicas

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de janeiro de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Funções pares

Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é **simétrico em relação à origem**, se, para cada $a \in A$, seu simétrico $-a$ também pertence a A, ou seja,

$$a \in A \Rightarrow -a \in A.$$

Exemplo 1. *Exemplos de conjuntos simétricos em relação à origem são o próprio conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, os subconjuntos $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Um intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$, ou fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é simétrico em relação à origem, se, e somente se, $a = -b$. Intervalos do tipo $(-a, a]$ e $[-a, a)$ não são simétricos em relação à origem.*

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é **par** se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$.

Observação 2. *A definição de função par* exige *que seu domínio seja simétrico em relação à origem. Caso contrário, não seria possível definir $f(-x)$, para cada $x \in A$, uma vez que $-x$ poderia não pertencer ao domínio de f.*

Exemplo 3. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem e seja $n = 2k \in \mathbb{N}$ um número natural par. A função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$, é par. De fato, $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$, pois n é par.*

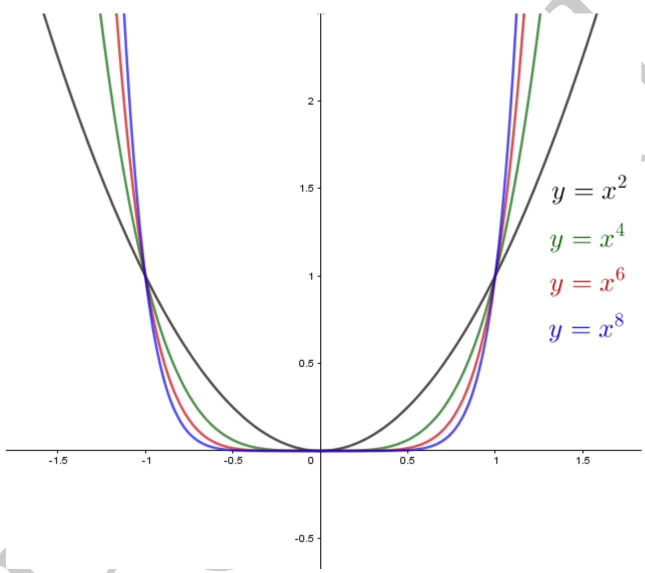

Figura 1: gráficos de algumas fuções pares.

Na Figura 1, podemos ver os gráficos de quatro funções pares do tipo $f(x) = x^n$, correspondentes a $n = 2, 4, 6, 8$. Observe que os quatro gráficos são *simétricos em relação ao eixo y*. Isso significa que, se girarmos cada um desses gráficos de 180° em torno do eixo y, o resultado será o próprio gráfico.

Em geral, dizemos que uma figura plana F é **simétrica em relação a uma reta** e se a rotação, no espaço, de 180° em torno dessa reta, fornece como resultado a própria figura F. A reta e é chamada **eixo de simetria** da figura F.

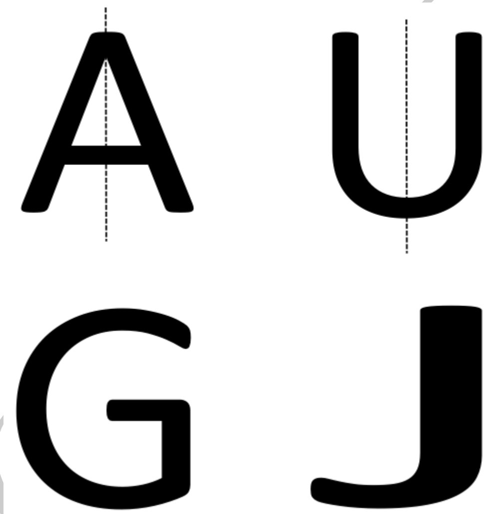

Figura 2: As letras A e U são simétricas, mas as letras G e J, não.

Na Figura 2, as letras “A” e “U” são simétricas em relação aos eixos de simetria que aparecem como retas tracejadas. Já as letras “G” e “J” não têm essa simetria.

Observação 4. *Outra maneira de ver a simetria em relação a um eixo é a seguinte: dizemos que uma figura F é simétrica em relação a uma reta e se, dado $x \in F$, existe $y \in F$ tal que a reta e é a mediatriz do segmento xy, ou seja, e é perpendicular ao segmento xy e passa por seu ponto médio.*

Lembremos que o gráfico $\mathrm{Gr}(f)$ de uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é o conjunto dos pares ordenados $(x, f(x))$, com $x \in A$. Quando desenhado no plano cartesiano, o conjunto

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

corresponde, em geral, a uma figura plana, que também é chamada de gráfico de f.

Se $A \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto simétrico em relação à origem, e se f é uma função par, então, para cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f, o ponto $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ também pertence a esse gráfico. Isso significa que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y. A figura a seguir ilustra essa situação.

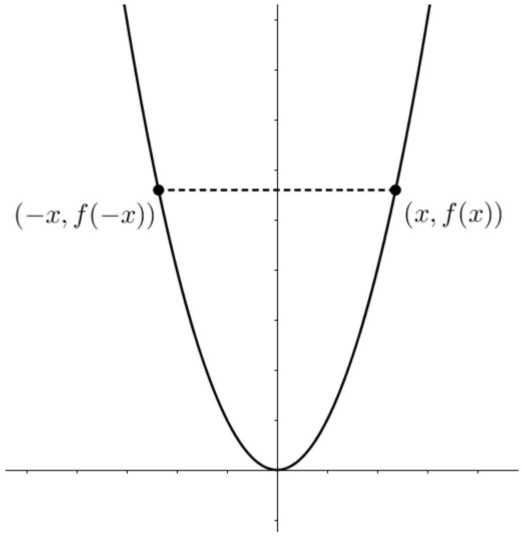

Figura 3: a cada ponto do gráfico corresponde um ponto simétrico, também pertencente ao gráfico.

Exemplo 5. *A função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos x$, é par. De fato, o domínio de f é o intervalo $[-\pi, \pi]$, simétrico em relação à origem. Além disso, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$. A igualdade $\cos(-x) = \cos x$ ocorre porque, medindo um arco de comprimento $x \in [-\pi, \pi]$ sobre o ciclo trigonométrico a partir do ponto $(1, 0)$, temos que $\cos x$ é a abscissa da projeção do ponto final do arco sobre o eixo x (veja a Figura 4).*

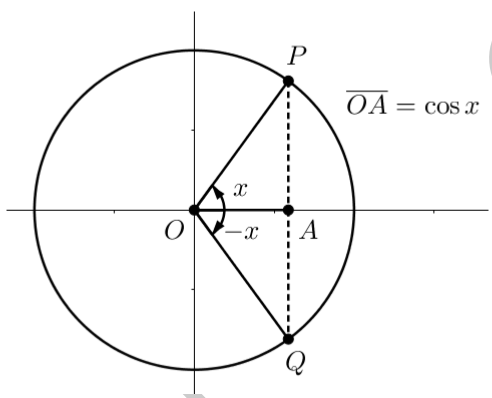

Figura 4: o cosseno é uma função par.

2 Fuções ímpares

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é chamada **ímpar**, se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$.

Observação 6. *Assim como no caso das funções pares, a definição de função ímpar* exige *que o domínio da função seja simétrico em relação à origem, pois do contrário $f(x)$ e $f(-x)$ poderiam não estar ambos definidos.*

Exemplo 7. *Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem e seja $n = 2k + 1$ um número natural ímpar. A função $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$ é ímpar. De fato, $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$, pois n é ímpar.*

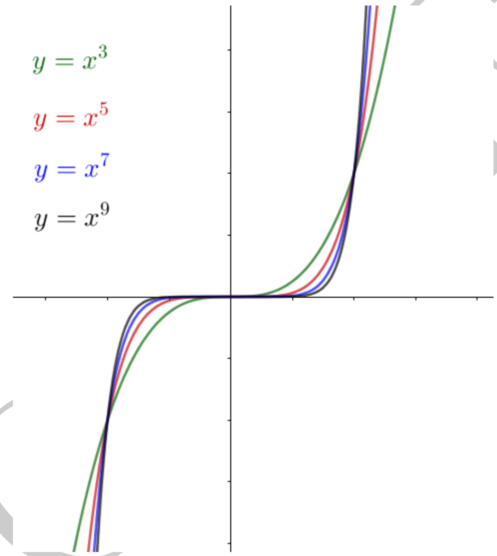

Figura 5: gráficos de algumas funções ímpares.

Na Figura 5 podemos ver os gráficos de quatro funções ímpares do tipo $f(x) = x^n$, com $n = 3, 5, 7, 9$.

Neste caso, os quatro gráficos são *simétricos em relação à origem*. Isso significa que, se cada um desses gráficos for girado de $180°$ em torno do ponto $O = (0, 0)$, a figura resultante dessa rotação é o próprio gráfico.

Em geral, dizemos que uma figura plana F é **simétrica em relação a um ponto** O se uma rotação de $180°$ em torno do ponto O fornece como resultado a própria figura.

A curva que aparece na Figura 6 é chamada *lemniscata de Bernoulli*. Ela foi estudada e descrita pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654–1705) em 1694, e sua equação em coordenadas (x, y) é

$$(x^2 + y^2)^2 = xy.$$

Observe que o ponto (x, y) pertence à lemniscata de Bernoulli se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação da curva. Supondo que o ponto A, de coordenadas (x, y) pertence à lemniscata, temos que o ponto B, de coordenadas $(-x, -y)$, também pertence à curva, pois

$$((-x)^2 + (-y)^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 = xy = (-x)(-y).$$

Dessa forma, a lemniscata de Bernoulli é uma figura simétrica em relação à origem.

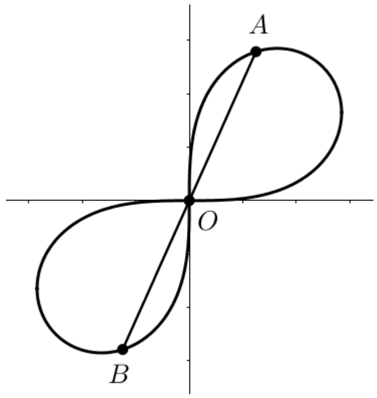

Figura 6: a lemniscata de Bernoulli, simétrica em relação à origem.

Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto simétrico em relação à origem e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar, então o gráfico de f é simétrico em relação à origem. De fato, se $(x, f(x))$ é um ponto do gráfico de f, então $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ também é um ponto desse gráfico, e os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, -f(x))$ são simétricos em relação à origem.

Observação 8. *A noção de subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ simétrico em relação à origem é um caso particular da noção de conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ simétrico em relação à origem.*

Exemplo 9. *A função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, é ímpar. De fato, o domínio de f é simétrico em relação à origem e $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$. Na Figura 4, os senos $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{sen}(-x)$ são representados pelos segmentos orientados AP e AQ, os quais têm uma mesma medida, mas sinais contrários: $\operatorname{sen}(-x) = AQ = -AP = -\operatorname{sen} x$.*

Existem funções que não são nem pares nem ímpares, mesmo seus domínios sendo simétricos em relação à origem.

Exemplo 10. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 - 2x$ não é par nem ímpar. De fato, $f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$, que é diferente de $f(x)$ e de $-f(x)$, se $x \neq 0$.*

Um resultado interessante, que vamos demonstrar a seguir, diz que toda função, definida em um conjunto simétrico em relação à origem, pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

Teorema 11. *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto simétrico em relação à origem e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função dada. Então, existem funções $P : A \to \mathbb{R}$, par, e $I : A \to \mathbb{R}$, ímpar, tais que $f(x) = P(x) + I(x)$. Além disso, essas funções são únicas, dependendo apenas de f.*

Prova. Se $P(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $I(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, então $P(x) + I(x) = f(x)$, $P(-x) = P(x)$ e $I(-x) = -I(x)$. Isso demonstra a existência de uma decomposição de f como no enunciado.

Para demonstrarmos a unicidade, suponhamos que existam funções P_1, par, e I_1, ímpar, tais que $P_1(x) + I_1(x) = f(x)$, para todo $x \in A$. Então $P_1(x) + I_1(x) = P(x) + I(x)$, e isso implica que $P_1(x) - P(x) = I(x) - I_1(x)$. Vamos usar, sem demonstração, o seguinte fato elementar: *a diferença entre duas funções pares é uma função par* e *a diferença entre duas funções ímpares é uma função ímpar*. Assim, a função $P_1 - P$ é par (por ser a diferença entre duas funções pares) e ímpar (por ser igual a $I - I_1$, a diferença entre duas funções ímpares). Mas, se uma função $d : A \to \mathbb{R}$ é simultaneamente par e ímpar e $x \in A$, então

$$d(x) = d(-x) = -d(x)$$

de sorte que $d(x) = 0$, para todo $x \in A$, ou seja, d é identicament nula. Portanto, $P_1(x) - P(x) = 0$ e, daí, $P_1(x) = P(x)$ e $I(x) - I_1(x) = 0$, isto é, $I(x) = I_1(x)$, para todo $x \in A$. Isso demonstra a unicidade da decomposição. □

Exemplo 12. *Como ilustração do Teorema 11, vamos escrever a função do Exemplo 10 como uma soma de uma função para e uma função ímpar.*

Sendo $f(x) = x^2 - 2x$, temos

$$P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{x^2 - 2x + x^2 + 2x}{2} = x^2$$

e

$$I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{x^2 - 2x - x^2 - 2x}{2} = -2x.$$

Portanto, $P(x) = x^2$ e $I(x) = -2x$ são as funções par e ímpar, respectivamente, tais que $x^2 - 2x = P(x) + I(x)$.

3 Funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **periódica** se existir um número real $p > 0$ tal que

$$f(x + p) = f(x), \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso exista um número real positivo p *mínimo* e que satisfaça (1), esse número é dito um **período** da função f.

Exemplo 13. *As funções seno $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $s(x) = \operatorname{sen} x$, e cosseno $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $c(x) = \cos x$, são periódicas, com período $p = 2\pi$.*

Exemplo 14. *A notação $\lfloor x \rfloor$ é usada para indicar o maior número inteiro que não supera o número real x. Por exemplo: $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$ e $\lfloor e \rfloor = 2$ (aqui, $e \cong 2,71828$ é a base dos logaritmos naturais).*

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ é periódica. Ela é chamada de ***função piso****. A diferença*

$x - \lfloor x \rfloor$ fornece a parte decimal *do número x. Como a parte inteira $\lfloor x \rfloor$ é retirada, essa diferença sempre é menor do que 1. Mais precisamente: $0 \le f(x) < 1$. Uma parte do gráfico da função piso é mostrada na Figura 7.*

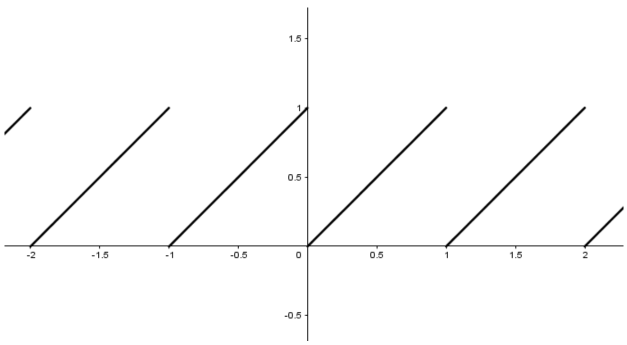

Figura 7: uma parte do gráfico da função piso.

Observe que $f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x+1-\lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, se $0 < p < 1$, então, escrevendo $x = 1-p$, temos $0 < x < 1$, de modo que $\lfloor x \rfloor = 0$. Ademais, $f(x+p) = f(1) = 1 - \lfloor 1 \rfloor = 1 - 1 = 0$, mas $f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x - 0 = x \neq 0$. Assim, um número real positivo menor do que 1 não pode satisfazer a condição (1). Logo, f é periódica com período 1.

Exemplo 15. *Seja n um número inteiro positivo. A função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f_n(x) = \lfloor 10^{n+1} x \rfloor - 10 \cdot \lfloor 10^n x \rfloor \qquad (2)$$

fornece o algarismo que aparece na enésima casa da representação decimal de x. De modo mais geral, poderíamos substituir 10 por um número natural qualquer b, de modo que a expressão de f, neste caso, forneceria o algarismo da enésima casa da representação de x na base *b.*

A função f_n é periódica, com período 10^{-n+1}. A Figura 8 mostra uma parte do gráfico de f_1. Note que, em cada intervalo $[m, m+1)$, com m inteiro, o gráfico é um sequência de "platôs", cada um correspondendo a uma altura constante, igual a um algarismo $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. Essa sequência se repete no intervalo seguinte, $[m+1, m+2)$.

Exemplo 16. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

é periódica, mas não tem período.

De fato, se r é um número racional positivo qualquer, então $f(x+r) = f(x)$, pois, se x é racional, então $x+r$ é racional, e, se x não é racional, então $x+r$ não é racional. Como não existe um menor racional positivo, concluímos que f não tem período.

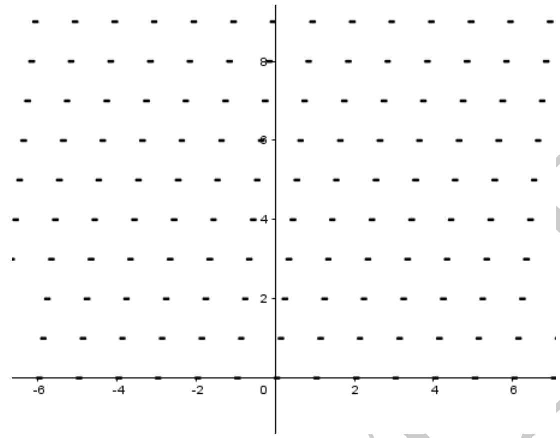

Figura 8: uma parte do gráfico da função f_1.

Dicas para o Professor

O material desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 minutos cada.

Como vimos no texto, os gráficos de funções pares, ímpares, e também das funções periódicas, apresentam propriedades de simetria. A sugestão de leitura 3 é um belíssimo livro abordando apenas o assunto "simetria", escrito por um dos mais importantes matemáticos do século XX.

Os vários exemplos dados neste texto ilustram a diversidade das funções pares, ímpares e periódicas. O Exemplo 16 esclarece que uma função pode ser periódica mas não ter período.

O Exemplo 15 pode ser melhor explorado considerando-se várias possíveis bases. Por exemplo, dado um número real qualquer x, a expressão

$$f_n(x) = \lfloor 2^n x \rfloor - 2 \cdot \lfloor 2^{n-1} x \rfloor$$

só pode ser igual a 0 ou 1 e, mais ainda, neste caso, $f_n(x)$ é o enésimo algarismo da parte não inteira na representação de x na base 2.

Um fato interessante, que você pode citar em uma turma que já tenha estudado integração é que $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 4,5 = \frac{0+1+\cdots+8+9}{10}$, o que significa que há uma distribuição uniforme dos algarismos nas partes fracionárias das representações dos números na base 10 (o mesmo ocorre em outras bases). De qualquer modo, a integral das funções do tipo $f_n(x)$ é trivial, pois elas são funções escada, ou seja, são constantes em intervalos, o que torna o cálculo da integral muito simples, pois é uma mera soma de áreas de retângulos.

As sugestões de leitura 1 e 2 contêm mais informações sobre os tipos de funções estudadas aqui.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.

2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2012.
3. Hermann Weyl. *Simetria*, EdUSP, São Paulo, 1997.