Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Produto Vetorial

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

Nesta aula, estudaremos uma operação definida entre vetores de $\mathbb{R}^3$, chamada *produto vetorial*.

1 Definição de produto vetorial

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não nulos e não paralelos em $\mathbb{R}^3$. Seja $\overrightarrow{n}$ um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ simultaneamente ($\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$). É possível escolher o sentido de $\overrightarrow{n}$ de duas maneiras, conforme mostrado na figura 1:

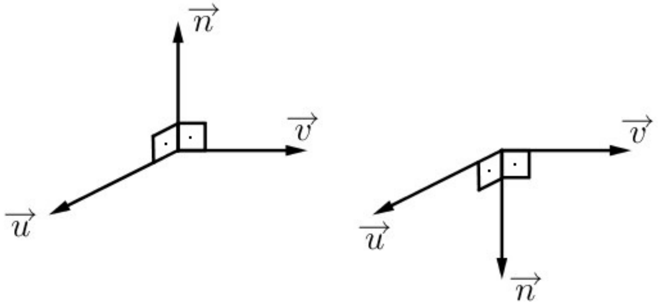

Figura 1: triedro positivo (à esquerda) e triedro negativo (à direita).

Para diferenciar tais maneiras, começamos denominando um trio ordenado de vetores (que podemos considerar com a mesma origem) dois a dois não paralelos de **triedro**. Dizemos que um triedro $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ é **positivo** ou **direto**, se ele satisfaz a **regra da mão direita**, que consiste no seguinte: se $\overrightarrow{u}$ aponta no sentido do dedo indicador e $\overrightarrow{v}$ aponta no sentido do dedo médio de uma mão direita (como mostrado na figura 2), então o vetor $\overrightarrow{n}$ aponta no sentido do polegar dessa mão.

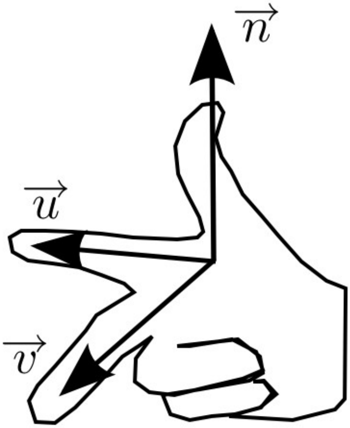

Figura 2: A regra da mão direita.

Caso o triedro $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ não satisfaça a regra da mão direita, ele é chamado triedro **negativo** ou **retrógrado**.

Assim, na figura 1, o triedro $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ à esquerda é positivo, enquanto o triedro $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ à direita é negativo.

Observação 1. *Não é difícil perceber que os triedros* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ *e* $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, -\overrightarrow{n})$ *têm o mesmo "sinal", ou seja, são ambos positivos ou ambos negativos.*

Dados dois vetores não paralelos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^3$, consideremos um vetor $\overrightarrow{n}$, unitário e simultaneamente ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ou seja, tal que

$$|\overrightarrow{n}| = 1, \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0, \quad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Impondo que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ seja um triedro positivo, o vetor $\overrightarrow{n}$ fica completamente determinado. Nesse caso, chamamos de **produto vetorial** de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ (nessa ordem) o vetor

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \operatorname{sen} \theta)\overrightarrow{n} \tag{1}$$

onde θ é o ângulo (entre 0 e 180°) entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos (de forma que $\theta = 0$ ou $180°$), definimos

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Em particular, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Com as definições acima, já podemos enumerar algumas propriedades do produto vetorial:

1. $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta$. Realmente, se $\theta \neq 0, 180°$, isso segue de que o vetor $\overrightarrow{n}$ tem módulo 1; se $\theta = 0$ ou $180°$, isso segue de que $\operatorname{sen}\theta = 0$.

2. O produto vetorial é *anticomutativo*, isto é,

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}. \tag{2}$$

   Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ forem paralelos, isto é óbvio, uma vez que ambos os membros da igualdade acima são iguais a 0. Senão, isto segue dos seguintes fatos: para obter $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, tomamos $\overrightarrow{n}$ de tal forma que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})$ seja um triedro positivo. Por outro lado, para obter $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$, tomamos $\overrightarrow{m}$ tal que $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{m})$ seja um triedro positivo. Então, pela Observação 1, temos $\overrightarrow{m} = -\overrightarrow{n}$. Agora, como o ângulo θ entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é igual ao ângulo entre $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$, temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} &= (|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{u}| \operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{m} \\
&= (|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta)\big(-\overrightarrow{n}\big) \\
&= -(|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta)\overrightarrow{n} \\
&= -\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}.
\end{aligned}$$

3. O produto vetorial é distributivo sobre a adição. Em símbolos, isso significa que, para $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}'$ em $\mathbb{R}^3$, temos

$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}') = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}'.$$

Para verificarmos a validade da distributividade, enunciada acima, vamos considerar o seguinte procedimento geométrico para a construção de $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ a partir de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$: considere os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ com origem no ponto A (veja a figura 3). Projete o vetor $\overrightarrow{v}$ sobre o plano α, que passa por A e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u}$; chame essa projeção de $\overrightarrow{v_1}$. Multiplique o vetor $\overrightarrow{v_1}$ pelo escalar $|\overrightarrow{u}|$. Faça uma rotação de $90°$ do vetor $|\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v_1}$ em torno do ponto A e dentro do plano α, para obter um vetor $\overrightarrow{w}$, de modo que o triedro $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ seja positivo. Afirmamos que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

Para verificarmos a validade dessa afirmação, observemos inicialmente que

$$|\overrightarrow{w}| = ||\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v_1}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v_1}|,$$

pois rotações não alteram o módulo de um vetor. Agora, como $\overrightarrow{v_1}$ é obtido a partir de $\overrightarrow{v}$ por projeção sobre um plano perpendicular a $\overrightarrow{u}$, temos que $|\overrightarrow{v_1}| = |\overrightarrow{v}|\operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Assim,

$$|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\operatorname{sen}\theta = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|.$$

Por construção, $\overrightarrow{w}$ é ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v_1}$, logo, é ortogonal a qualquer vetor coplanar com $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v_1}$; em particular, $\overrightarrow{w}$ é ortogonal a $\overrightarrow{v}$. Assim, os vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ têm a mesma direção.

Finalmente, como exigimos que o triedro $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ seja positivo, o vetor $\overrightarrow{w}$ deve ter também o mesmo sentido que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, portanto $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

A discussão acima pode ser resumida da seguinte maneira: fixado $\overrightarrow{u}$, o produto vetorial de $\overrightarrow{u}$ por um vetor $\overrightarrow{v}$ é resultado da aplicação em sequência de três tranformações:

i. uma projeção P, tal que $P(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v_1}$;

ii. uma multiplicação por escalar M, tal que $M(\overrightarrow{v_1}) = |\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v_1}$;

iii. uma rotação R, tal que $R(|\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{w}$.

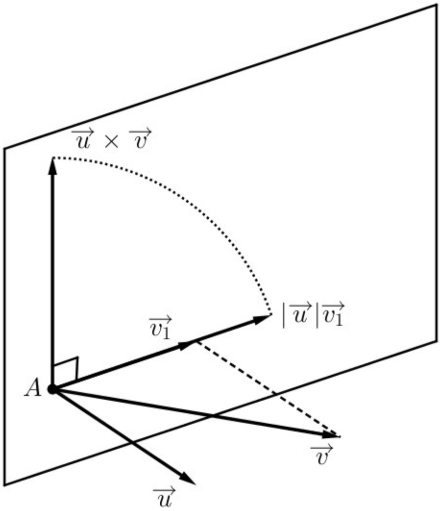

Figura 3: construção do produto vetorial.

Assim,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} = R(M(P(\vec{v}))).$$

Mas, projeções, multiplicações por escalar e rotações preservam somas, o que significa que

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{v}') &= R(M(P(\vec{v} + \vec{v}'))) \\
&= R(M(P(\vec{v}) + P(\vec{v}'))) \\
&= R(M(P(\vec{v})) + M(P(\vec{v}'))) \\
&= R(M(P(\vec{v}))) + R(M(P(\vec{v}'))) \\
&= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'.
\end{aligned}$$

Isso estabelece a propriedade distributiva. Essa propriedade será importante para os cálculos que faremos a seguir.

2 Coordenadas do produto vetorial

A partir dos vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$ podemos gerar qualquer outro vetor de $\mathbb{R}^3$. De fato, se $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, y)\\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\\ &= x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.\end{aligned}$$

Além disso, dado $\overrightarrow{u}$, os números reais x, y e z são determinados de modo único. Isso porque, se pudermos escrever $\overrightarrow{u} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k}$, então $(x, y, z) = (x', y', z')$ o que implica $x = x'$, $y = y'$ e $z = z'$. O triedro positivo $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ é chamado **base canônica** de $\mathbb{R}^3$.

Sabemos que $|\overrightarrow{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ e, da mesma forma, $|\overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{k}| = 1$. Além disso, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 1{\cdot}0 + 0{\cdot}1 + 0{\cdot}0 = 0$ e, analogamente, $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = 0$ e $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0$, ou seja, os vetores da base canônica são dois a dois ortogonais, o que significa que o ângulo entre quaisquer dois deles é $90°$.

Como $\operatorname{sen} 90° = 1$, a igualdade (1), nos fornece as seguintes identidades:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}. \tag{3}$$

Além disso, a propriedade (2) do produto vetorial implica

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = 0. \tag{4}$$

Com essas identidades podemos obter as coordenadas do produto vetorial de dois vetores, dadas em função das coodenadas desses vetores. Mais precisamente, sendo

$$\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}$$

e

$$\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2) = x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k},$$

temos

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}) \times (x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}).$$

Usando a propriedade distributiva, a anticomutatividade do produto vetorial e as identidades (3) e (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= x_1x_2(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) + x_1y_2(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) + x_1z_2(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) \\ &\quad + y_1x_2(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}) + y_1y_2(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}) \\ &\quad + y_1z_2(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}) + z_1x_2(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}) \\ &\quad + z_1y_2(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}) + z_1z_2(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}) \\ &= x_1y_2\overrightarrow{k} + x_1z_2(-\overrightarrow{j}) + y_1x_2(-\overrightarrow{k}) \\ &\quad + y_1z_2\overrightarrow{i} + z_1x_2\overrightarrow{j} + z_1y_2(-\overrightarrow{i}) \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\overrightarrow{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\overrightarrow{j} \\ &\quad + (x_1y_2 - y_1x_2)\overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

Uma maneira fácil de lembrar a última expressão acima para $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é percebendo que ela admite uma representação mnemônica como um “determinante”:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Exemplo 2. *Duas retas AB e CD no espaço e não contidas em um mesmo plano são chamadas* **reversas**. *Encontre a menor distância d entre essas retas e localize pontos $P \in AB$ e $Q \in CD$ tais que $\overline{PQ} = d$.*

Solução: a distância entre as duas retas reversas é igual à distância entre os planos paralelos que as contêm (veja a figura abaixo).

O vetor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$ é perpendicular a ambas as retas e aos planos que as contêm. Seja $\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|}$. Se $X \in AB$ e

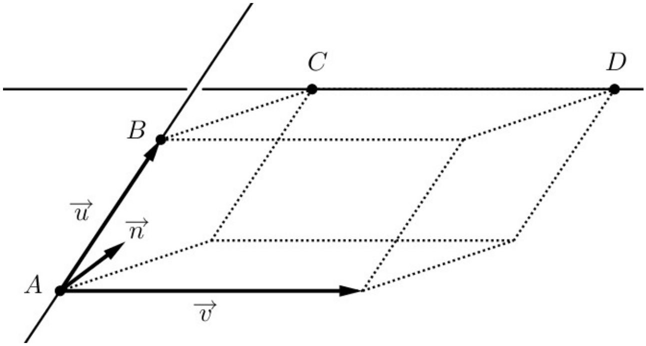

Figura 4: duas retas reversas AB e CD e os planos paralelos que as contêm.

$Y \in CD$, então $d = |\overrightarrow{XY} \cdot \vec{n}|$ é a distância entre as retas AB e CD (as barras verticais indicam valor absoluto).

Para encontrar $P \in AB$ e $Q \in CD$ tais que $\overline{PQ} = d$, considere $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CQ} = \beta\overrightarrow{CD}$ e encontre os escalares α e β a partir da condição de que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$.

Vamos ilustrar esse procedimento com um exemplo numérico: dados $A = (1, -2, -1), B = (4, 0, -3), C = (1, 2, -1)$ e $D = (2, -4, -5)$, calculemos a distância entre as retas AB e CD.

Seguindo o esquema delineado acima, calculamos sucessivamente

$$\overrightarrow{AB} = (3, 2, -2), \quad \overrightarrow{CD} = (1, -6, -4),$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = (-20, 10, -20).$$

Como

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-20)^2 + 10^2 + (-20)^2} = \sqrt{900} = 30,$$

temos

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right).$$

Considerando $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AC} = (0, 4, 0)$, temos

$$d = |(-2/3, 1/3, -2/3) \cdot (0, 4, 0)| = \frac{4}{3}.$$

Para encontrarmos $P \in AB$ e $Q \in CD$ tais que $\overline{PQ} = d = 4/3$, façamos

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} = (3\alpha, 2\alpha, -2\alpha)$$

e

$$\overrightarrow{CQ} = \beta\overrightarrow{CD} = (\beta, -6\beta, -4\beta).$$

Então,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} \\ &= (-3\alpha, -2\alpha, 2\alpha) + (0, 4, 0) + (\beta, -6\beta, -4\beta) \\ &= (-3\alpha + \beta, -2\alpha - 6\beta + 4, 2\alpha - 4\beta).\end{aligned}$$

Agora, devemos encontrar α e β tais que $\overrightarrow{PQ}$ seja paralelo a $\overrightarrow{n} = (-2/3, 1/3, -2/3)$. A condição para que vetores sejam paralelos é que suas coordenadas sejam respectivamente proporcionais. Assim,

$$\frac{-3\alpha + \beta}{-2/3} = \frac{-2\alpha - 6\beta + 4}{1/3} = \frac{2\alpha - 4\beta}{-2/3}.$$

Resolvendo essas equações, encontramos $\alpha = \beta = \frac{4}{9}$, logo,

$$\overrightarrow{AP} = (4/3, 8/9, -8/9) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CQ} = (4/9, -8/3, -16/9).$$

Por fim, como $\overrightarrow{AP} = P - A$, temos que

$$\begin{aligned}P &= A + \overrightarrow{AP} \\ &= (1, -2, -1) + (4/3, 8/9, -8/9) \\ &= (7/3, -10/9, -17/9).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$Q = C + \overrightarrow{CQ} = (13/9, -2/3, -25/9).$$

Observação 3. *O produto vetorial* **não** *é associativo, ou seja, em geral*

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}).$$

De fato, $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ *é perpendicular a* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$*, logo está no mesmo plano que* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$*, ou seja,* $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$*, com* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Pela mesma razão,* $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \gamma\overrightarrow{v} + \delta\overrightarrow{w}$*. Então, se os planos de* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$*,* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *forem distintos, em geral esses vetores não são iguais.*

Para um exemplo numérico, considere $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (3, 2, -1)$. Convidamos o leitor a verificar que $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (-4, 10, 14)$ e $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (-10, 5, 15)$.

3 Algumas aplicações

Nesta seção, veremos exemplos de como o produto vetorial pode ser aplicado à Geometria e à Mecânica.

Exemplo 4. *O módulo do produto vetorial* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *de dois vetores não nulos é igual à área do paralelogramo por eles determinado (figura 5).*

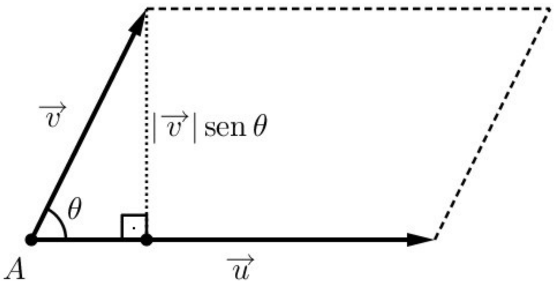

Figura 5: um paralelogramo determinado por dois vetores.

A altura h baixada desde a extremidade do vetor $\overrightarrow{v}$ ao vetor $\overrightarrow{u}$ forma, junto com o vetor $\overrightarrow{v}$ e sua projeção sobre $\overrightarrow{u}$, um triângulo retângulo. Pela definição de seno, temos: $h = |\overrightarrow{v}| \operatorname{sen}\theta$, logo a área do paralelogramo determinado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\operatorname{sen}\theta = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$.

No caso particular em que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$, a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é igual a zero, o que significa que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos. Isso nos dá um critério para a *colinearidade* de três pontos: os pontos $A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ são colineares se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos, ou seja, se $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0$. Como $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$, em termos de coordenadas temos que A, B e C são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Vamos encerrar esta aula com um exemplo de aplicação à Mecânica.

Exemplo 5. *Se um corpo gira simultaneamente em torno de dois eixos que se intersectam em um ponto O, então o seu movimento de rotação é equivalente à rotação em torno de um terceiro eixo que passa por esse mesmo ponto O.*

Suponha que um corpo rígido gire em torno de um eixo e que passa pelo ponto O e que sua *velocidade angular* seja constante igual a $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. Isso significa que cada ponto P do corpo descreve um círculo cujo centro é um ponto do eixo e, e que, num intervalo de tempo Δt, o ponto P percorre um arco de $\omega\Delta t$ radianos. O **vetor velocidade angular**, ou **giro** (*spin*) do corpo rígido, em torno do eixo e, é o vetor $\overrightarrow{\Omega}$ cujo módulo é $|\overrightarrow{\Omega}| = \omega$, a direção é a mesma do eixo de rotação do corpo e o sentido é determinado pela regra da mão direita: se

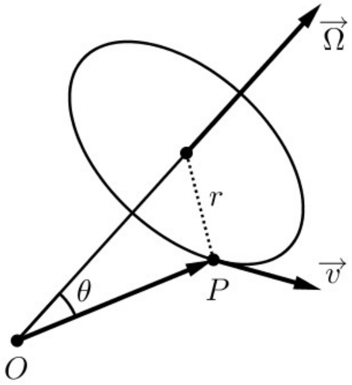

Figura 6: rotação do ponto P em torno de um eixo.

o dedo médio de uma mão direita aponta no sentido do raio de um círculo de rotação e o dedo indicador aponta no sentido da rotação do ponto, então o polegar aponta no sentido de $\overrightarrow{\Omega}$.

O ponto P gira em um círculo de raio $r = |\overrightarrow{OP}|\,\text{sen}\,\theta$, logo, a velocidade linear desse ponto tem módulo

$$|\overrightarrow{v}| = \omega r = \omega|\overrightarrow{OP}|\,\text{sen}\,\theta = |\overrightarrow{\Omega}||\overrightarrow{OP}|\,\text{sen}\,\theta.$$

Como $\overrightarrow{v}$ é ortogonal a $\overrightarrow{OP}$ e a $\overrightarrow{\Omega}$, temos que

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{OP}. \tag{7}$$

O ponto O pode ser escolhido arbitrariamente no eixo de rotação.

Suponha, agora, que o ponto P pertence a um corpo que tem giros $\overrightarrow{\Omega}_1$ e $\overrightarrow{\Omega}_2$ em torno de dois eixos que se intersectam em um ponto O. Então, P tem velocidades lineares, relativas às duas rotações, $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{\Omega}_1 \times \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{\Omega}_2 \times \overrightarrow{OP}$. Assim, a velocidade linear do ponto P é

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \\ &= \overrightarrow{\Omega}_1 \times \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{\Omega}_2 \times \overrightarrow{OP} \\ &= (\overrightarrow{\Omega}_1 + \overrightarrow{\Omega}_2) \times \overrightarrow{OP},\end{aligned}$$

o que significa que o ponto P descreve uma rotação com giro $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_1 + \overrightarrow{\Omega}_2$ em torno de um eixo que passa por O e tem a direção do vetor $\overrightarrow{\Omega}$.

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Na definição de produto vetorial de dois vetores, a regra da mão direita é um modo de estabelecer uma *orientação* no plano determinado por esses vetores, ou seja, estabelecer a diferença entre direita e esquerda, horário e anti-horário. Outra maneira de estabelecer o sentido do produto vetorial de dois vetores é usar a *regra do parafuso* que diz que o sentido do produto vetorial deve ser aquele que um parafuso segue quando enroscado por um giro no sentido horário.

Se você achar conveniente, pode fazer algumas experiências com seus alunos enroscando parafusos e associando o movimento de giro do parafuso ao movimento linear decorrente desse giro. Uma outra ideia simples que esclarece a relação entre orientação em um plano e o vetor normal a esse plano é comparar a orientação de duas pessoas que estejam viradas uma de frente para outra (como, em geral, ocorre em sala de aula, com você de frente para seus alunos). A direita de uma das pessoas corresponde à esquerda da outra, e vice-versa. Também o sentido de rotação, horário ou anti-horário, é invertido para pessoas que estão de frente uma para outra. Isso ocorre porque os vetores que correspondem aos sentidos de visão apontam em sentidos contrários.

O produto vetorial tem importância geométrica, pois pode ser usado, por exemplo, para calcular áreas e para decidir sobre a colinearidade de três pontos. Também tem importância na Mecânica, pois é bastante útil para o estudo rotações em torno de eixos no espaço. Por fim, tem importância do ponto de vista algébrico, pois é um exemplo de operação não comutativa e não associativa. Na verdade, o produto vetorial é um caso particular de um produto mais geral, em $\mathbb{R}^4$, que dá a esse espaço uma estrutura algébrica de *anel de divisão*. Esse exemplo é exatamente o anel dos *quatérnios*, descoberto pelo matemático irlandês W. R. Hamilton em meados do século XIX.

As sugestões de leitura complementar abaixo tratam de produtos vetoriais (e, mais geralmente, de vetores) e têm vários exercícios resolvidos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. N. M. dos Santos et al. *Vetores e Matrizes: Uma Introdução à Álgebra Linear*. Cengage Learning, São Paulo, 2007.
2. M. R. Spiegel. *Análise Vetorial*, Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1972.