Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

A Prova

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antônio Caminha Muniz Neto

20 de julho de 2019

1 Introdução

A Matemática possui uma característica única, que a diferencia das ciências, da Filosofia e de todas as outras formas de discurso intelectual: o uso de demonstrações rigorosas.

Uma demonstração (ou prova) pode ser entendida como uma cadeia de raciocínio estreitamente unida, seguindo regras lógicas estritas, que levam inexoravelmente a uma conclusão particular. É um processo no qual se estabelece uma verdade absoluta e irrevogável. Essa é a razão pela qual a Matemática que foi feita por Euclides, há mais de 2300 anos, é tão relevante quanto a Matemática que é produzida hoje (e também responde pelo fato de Matemática ser algo difícil de aprender, dado seu caráter cumulativo).

Provas empregam Lógica, mas geralmente também incluem o uso de linguagem natural, que, por vezes, traz certas ambiguidades. De fato, a grande maioria das provas em Matemática escrita pode ser considerada como uma aplicação rigorosa da lógica informal. Provas puramente formais, escritas em linguagem simbólica em vez de linguagem natural, são reservadas à Lógica Teórica.

Existem diversas formas de se provar teoremas. Neste material daremos atenção a uma técnica de prova específica, a **prova direta**.

2 Prova direta

A prova direta é a interpretação do argumento lógico conhecido como **Modus Ponens**, o qual é representado simbolicamente como

$$p \to q, p \vdash q.$$

Este argumento pode ser compreendido da seguinte forma:

- Se p é verdadeiro e a condicional $p \to q$ também é verdadeira, então q será verdadeira.

Vejamos, com um exemplo, como isso funciona de maneira concreta.

Exemplo 1. *Prove que todo quadrado de um número inteiro deixa resto* 0 *ou* 1 *na divisão por* 4.

Prova. Sabemos (por conhecimento prévio) que todo número inteiro n é par ou ímpar. Se ele for par, então existe k inteiro tal que $n = 2k$; se ele for ímpar, então existe k inteiro tal que $n = 2k+1$. Assim, no caso em que n é par, temos:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2.$$

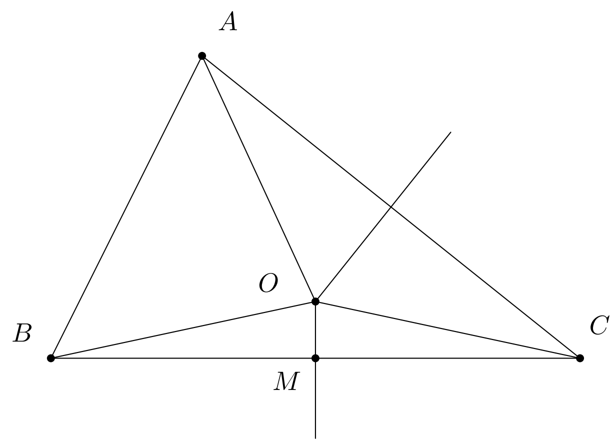
No caso em que n é ímpar, temos:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

Portanto, n^2 ou deixará resto zero na divisão por 4 ou deixará resto 1. □

Agora, vejamos um exemplo oriundo da Geometria.

Exemplo 2. *Mostre que as três mediatrizes relativas aos lados de um triângulo encontram-se em um único ponto, chamado de* ***circuncentro*** *do triângulo.*



Prova. Sejam ABC um triângulo. Como os lados AC e BC não são paralelos nem estão sobre uma mesma reta, as mediatrizes dos lados BC e CA não são paralelas (aqui, o argumento novamente se apoia em conhecimentos prévios). Portanto, tais mediatrizes são concorrentes, e podemos considerar o ponto O, comum a ambas

Se M é o ponto médio de BC (veja a figura acima[1]), veja que os triângulos OMB e OMC são congruentes, pelo caso de congruência LAL (mais uma vez, conhecimentos prévios são aplicados aqui); logo, $\overline{OB} = \overline{OC}$. De modo análogo, podemos demonstrar que $\overline{OC} = \overline{OA}$.

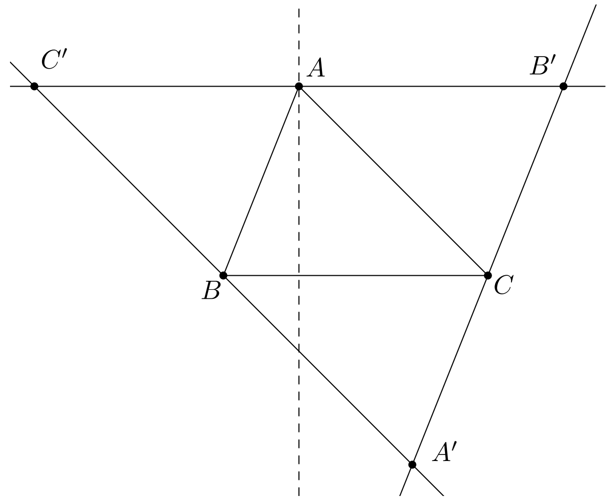
Uma vez que $\overline{OB} = \overline{OC}$ e $\overline{OC} = \overline{OA}$, concluímos que $\overline{OB} = \overline{OA}$. Então, o triângulo AOB é isósceles de base AB. Sendo N é o ponto médio de AB, segue que os triângulos ANO e BNO são congruentes, dessa vez pelo caso de congruência LLL; portanto, $A\widehat{N}O = B\widehat{N}O$. Como $A\widehat{N}O + B\widehat{N}O = 180°$, segue que $A\widehat{N}O = B\widehat{N}O = 90°$. Então, $\overleftrightarrow{NO}$ é perpendicular a AB em seu ponto médio, de forma que é a mediatriz de AB. □

Uma vez que tenhamos demonstrado um teorema, podemos utilizá-lo para demonstrar outros resultados. Veja um exemplo dessa situação, para cuja prova utilizamos o resultado demonstrado no exemplo anterior.

Exemplo 3. *Mostre que as alturas relativas aos lados de um triângulo encontram-se em um único ponto, chamado de* ***ortocentro*** *do triângulo.*

Prova. Sejam ABC um triângulo e r, s, t as retas paralelas aos lados BC, CA, AB, respectivamente, e passando pelos pontos A, B, C, também respectivamente (veja a figura a seguir).

[1] Em qualquer demonstração de um resultado de Geometria, o papel das figuras é auxiliar a compreensão da situação que está sendo analisada, sem, no entanto, interferir diretamente no argumento.



Como $r \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $s \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ não são paralelas, temos que r e s também não são paralelas. Seja C' seu ponto de interseção. De forma análoga, podemos considerar os pontos de interseção A' e B', dos pares de retas s, t e r, t, respectivamente.

Note que $AB'CB$ é um paralelogramo, pois tem pares de lados opostos paralelos. Com isso, $ABC \equiv AB'C$. De modo análogo, $ABC \equiv ABC'$ e $ABC \equiv A'BC$. Então, $\overline{AB'} = \overline{BC} = \overline{AC'}$, de sorte que A é o ponto médio de $B'C'$. Da mesma forma, B é o ponto médio de $A'C'$ e C o de $A'B'$.

Agora, como a altura de ABC relativa a A é perpendicular a BC e $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$, temos que tal altura também é perpendicular a $\overleftrightarrow{B'C'}$. Portanto, a altura de ABC relativa a A é perpendicular a $B'C'$ e passa por seu ponto médio A; logo, ela é a mediatriz do lado $B'C'$ do triângulo $A'B'C'$. Do mesmo modo, as alturas de ABC relativas aos vértices B e C são, respectivamente, as mediatrizes dos lados $A'C'$ e $A'B'$ do triângulo $A'B'C'$

Mas, pelo exemplo anterior, as mediatrizes do triângulo $A'B'C'$ passam em um mesmo ponto. Logo, as alturas do triângulo ABC, sendo exatamente as mediatrizes dos lados de $A'B'C'$, passam por um mesmo ponto. □

A seguir, praticamos um pouco mais a demonstração de resultados concretos em Matemática. Antes de passar para os exemplos, confira as dicas abaixo:

- Estruture a prova, isto é, faça um esforço mental para planejar quais argumentos serão utilizados e em qual sequência.
- Use símbolos conhecidos e, se necessário, defina variáveis novas, que não estão no enunciado.
- Use suas palavras; escrever uma demonstração não é muito diferente de criar uma história.
- Cuidado para não assumir como verdadeiro aquilo que se quer provar.
- Lembre-se de que padrões observados devem ser justificados.

Exemplo 4. *Mostre que o produto de quatro inteiros consecutivos sempre é um múltiplo de* 24.

Prova. Seja $P = x(x+1)(x+2)(x+3)$ o produto de quatro inteiros consecutivos. Como $24 = 3 \cdot 8$, com 3 e 8 primos entre si, é suficiente mostrarmos que P é múltiplo de 3 e de 8. Vamos separar a demonstração nessas duas partes.

(i) P é múltiplo de 3: note que em um conjunto de três inteiros consecutivos sempre haverá, necessariamente, um número múltiplo de 3. Como P é o produto dos quatro inteiros consecutivos x, $x+1$, $x+2$, $x+3$, concluímos que um desses números é múltiplo de 3; logo, P também é um múltiplo de 3.

(ii) P é múltiplo de 8: note que, em um conjunto de quatro inteiros consecutivos, sempre haverá, necessariamente, dois números pares. Mais ainda, dentre esses dois números pares, um será múltiplo de 4. Logo, um dos números x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ será múltiplo de 2 e outro será múltiplo de 4. Portanto, P será múltiplo de $2 \cdot 4 = 8$.

□

Uma forma específica de prova direta é a demonstração pela apresentação de exemplos, caso isso baste para justificar o que é pedido. Ilustramos essa situação a seguir:

Exemplo 5. *Mostre que os números de* 1 *a* 16 *podem ser escritos em uma linha reta, de modo que a soma de quaisquer dois números consecutivos seja um quadrado perfeito.*

Prova. Inicialmente, observamos que a maior soma possível de dois números de 1 a 16 é $15 + 16 = 31$. Portanto, os quadrados perfeitos que podem aparecer como soma de dois dos números de 1 a 15 são $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$.

Agora, vamos listar todas as maneiras possíveis de obter um desses quadrados como soma de dois números de 1 a 16:

$1+3=4$	$1+8=9$	$1+15=16$	$9+16=25$
	$2+7=9$	$2+14=16$	$10+15=25$
	$3+6=9$	$3+13=16$	$11+14=25$
	$4+5=9$	$4+12=16$	$12+13=25$
		$5+11=16$	
		$6+10=16$	
		$7+9=16$	

Nas somas acima, note que 8 e 16 são os únicos números que aparecem uma única vez. Logo, o primeiro número deve ser 8 e o último deve ser 16, ou o contrário. Assim, examinando cuidadosamente as somas dadas, percebemos que uma possível sequência é:

$$8-1-15-10-6-3-13-12-4-5-11-14-2-7-9-16.$$

$\square$

Notemos que a demonstração por exibição de exemplos pode ser útil até mesmo quando queremos mostrar a existência de um conjunto com infinitos elementos:

Exemplo 6. *Um número n é dito azul se a soma de seus algarismos for igual à soma dos algarismos de $3n+11$. Prove que existem infinitos números azuis.*

Demonstração. Um exemplo de número azul é 17: veja que a soma de seus algarismos é 8 e a soma dos algarismos de $3 \cdot 17 + 11 = 62$ também é 8.

Agora, a ideia é construir vários exemplos utilizando o caso inicial como base e, em seguida, perceber um padrão que permita extrapolar os exemplos construídos para um conjunto infinito de exemplos. Isso pode ser difícil e requerer que você teste possibilidades adequadas à extrapolação por um bom tempo.

Omitindo os inevitáveis rascunhos, tentamos os números 107 e 1007: a soma dos algarismos de ambos é 8, que é a mesma soma dos algarismos de seus triplos, adicionados de 11 unidades: $3 \cdot 107 + 11 = 332$ e $3 \cdot 1007 + 11 = 3032$. Logo, 107 e 1007 também são azuis.

Extrapolando tais exemplos, considere um número da forma

$$1\underbrace{000...00}_{n \text{ zeros}}7.$$

A soma de seus algarismos é 8, enquanto

$$3 \cdot 1\underbrace{000...00}_{n \text{ zeros}}7 + 11 = 3\underbrace{000...00}_{n-1 \text{ zeros}}32.$$

Tal número também tem soma de seus algarismos igual a 8, de forma que é azul. Logo, existem infinitos números inteiros azuis. $\square$

Por fim, é interessante contrastar as demonstrações dos dois últimos exemplos acima com aquelas dos anteriores. Mais precisamente, porque as demonstrações daqueles exemplos não podem ser dadas através da apresentação de exemplos?

3 Sugestões ao professor

Separe três encontros de 50 minutos para desenvolver o conteúdo deste material. Demonstrações são difíceis de serem compreendidas pelos alunos em um primeiro contato. Por isso tenha paciência e peça para seus alunos também terem. Separe um momento para que os alunos pensem em suas próprias demonstrações, possivelmente para outros problemas que você venha a sugerir e que ache mais adequados à sua turma. Se encontrar algum erro de argumentação lógica no raciocínio de algum estudante, indique onde está esse erro, fazendo-o refletir sobre sobre os próprios argumentos utilizados. Por exemplo, se um aluno pergunta sugere que em um conjunto de quatro inteiros consecutivos sempre há um múltiplo de 8, confronte-o com o exemplo $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ e pergunte onde está o múltiplo de 8. Aproveite a situação e motive-o a ajustar o seu raciocínio.