Material Teórico - Módulo Triângulo Retângulo, Leis dos Cossenos e dos Senos, Polígonos Regulares

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos - Parte 3

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

02 de Janeiro de 2026

Portal OBMEP

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 A Relação de Stewart

O objetivo desse material é utilizar a Lei dos Cossenos para demonstrar e exibir algumas aplicações do importante resultado a seguir, o qual é conhecido como a **Relação de Stewart**.

Teorema 1. *Seja ABC um triângulo cujos lados AB, AC e BC medem, respectivamente, c, b e a. Se D for um ponto sobre o lado BC tal que $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e $\overline{AD} = x$ (acompanhe na figura a seguir), então*

$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn). \tag{1}$$

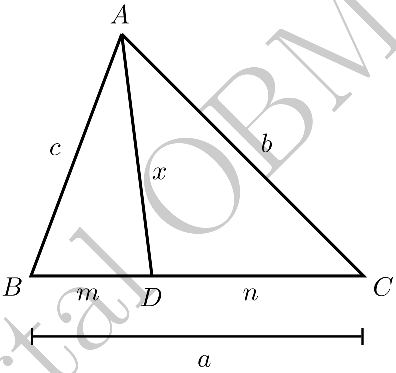


Figura 1: a relação de Stewart.

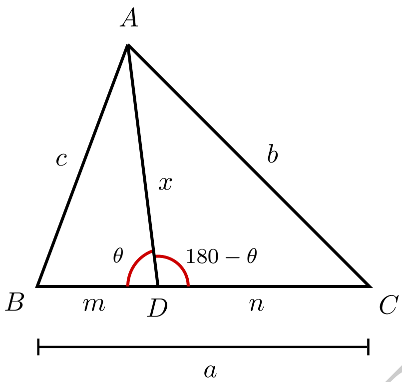
Prova. Denotando $A\widehat{D}B = \theta$, temos $A\widehat{D}C = 180 - \theta$ (veja a próxima figura). Aplicando a Lei dos Cossenos ao triângulo ABD, obtemos:

$$c^2 = x^2 + m^2 - 2xm\cos\theta;$$

daí, segue que

$$\cos\theta = \frac{x^2 + m^2 - c^2}{2xm}. \tag{2}$$

Portal OBMEP



Agora, lembrando que $\cos(180-\theta) = -\cos\theta$, aplicamos a Lei dos Cossenos ao triângulo ACD para obter:

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + n^2 - 2xn\cos(180-\theta) \\ &= x^2 + n^2 + 2nx\cos\theta; \end{aligned}$$

logo,

$$\cos\theta = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{2xn}. \tag{3}$$

Igualando as expressões para $\cos\theta$ em (2) e (3), obtemos a igualdade

$$\frac{x^2 + m^2 - c^2}{\cancel{2x}\,m} = \frac{b^2 - x^2 - n^2}{\cancel{2x}\,n},$$

ou seja,

$$n\left(x^2 + m^2 - c^2\right) = m\left(b^2 - x^2 - n^2\right).$$

Então, distribuindo os produtos em ambos os membros da igualdade acima e usando o fato de que $m+n=a$, um pouco de álgebra elementar fornece, sucessivamente,

$$nx^2 + nm^2 - nc^2 = mb^2 - mx^2 - mn^2 \quad \therefore$$

$$\underbrace{nx^2 + mx^2}_{=(m+n)x^2} + \underbrace{nm^2 + mn^2}_{=(m+n)mn} = mb^2 + nc^2 \quad \therefore$$

Portal OBMEP

$$b^2m + c^2n = (m+n)x^2 + (m+n)mn \ \therefore$$
$$b^2m + c^2n = ax^2 + amn \ \therefore$$
$$b^2m + c^2n = a(x^2 + mn).$$

$\square$

Observação 2. *Veja que a fórmula* (1) *pode ser reescrita como*

$$x^2 = \frac{b^2m + c^2n}{a} - mn. \tag{4}$$

Se o ângulo $\angle BAC$ for reto e x for a altura de ABC relativa ao lado BC (que, por sua vez, será a hipotenusa de ABC), então, nas notações da figura 1, as relações métricas em triângulos retângulos fornecem

$$b^2 = an \quad \text{e} \quad c^2 = am.$$

Assim, a Relação de Stewart (mais precisamente (4)*) pode ser escrita como*

$$x^2 = \frac{anm + amn}{a} - mn = \frac{2\cancel{a}mn}{\cancel{a}} - mn = mn,$$

fórmula que também já conhecemos do estudo de relações métricas em triângulos retângulos.

Para o que segue, definimos uma **ceviana** de um triângulo ABC como um segmento que une um vértice do triângulo a um ponto do lado oposto a esse vértice. Em particular, as **medianas** de um triângulo são as cevianas que ligam cada vértice ao ponto médio do lado oposto.

A seguir, mostraremos como é possível calcular as medidas de algumas cevianas de um triângulo dado utilizando a Relação de Stewart.

Exemplo 3. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Denotando por M o ponto médio do lado BC, temos que a medida m_A da mediana AM é dada, em função de a, b e c, pela fórmula:*

$$m_A = \frac{\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}}{2}.$$

Portal OBMEP

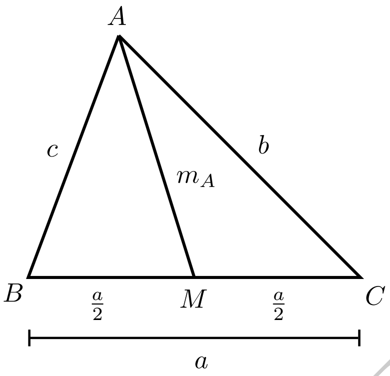


Figura 2: calculando a mediana m_A de um triângulo.

Prova. Com as notações da figura acima, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABC, obtemos:

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = a\left(m_A^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right).$$

Cancelando um fator a em ambos os membros da igualdade acima, ficamos com

$$\frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) = m_A^2 + \frac{a^2}{4},$$

de sorte que

$$m_A^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}.$$

Portanto,

$$m_A = \frac{\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}}{2}.$$

$\square$

Vale observar que fórmulas análogas valem para as medianas m_B e m_C relativas aos vértices B e C do triângulo

Portal OBMEP

ABC, respectivamente. Mais precisamente, temos:

$$m_B = \frac{\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}}{2}$$

e

$$m_C = \frac{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}}{2}.$$

Exemplo 4. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$. Sejam, ainda, m_A, m_B e m_C os comprimentos das medianas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. Mostre que*

$$\frac{m_A^2+m_B^2+m_C^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{3}{4}.$$

Prova. Utilizando a fórmula deduzida no Exemplo 3 e o comentário subsequente à sua prova, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{m_A^2+m_B^2+m_C^2}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4(a^2+b^2+c^2)}+\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad +\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4(a^2+b^2+c^2)} \\
&= \frac{2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2}{4(a^2+b^2+c^2)} \\
&\quad +\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4(a^2+b^2+c^2)} \\
&= \frac{3\left(\cancel{a^2+b^2+c^2}\right)}{4\left(\cancel{a^2+b^2+c^2}\right)}=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 5. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$ e $\overline{BC}=a$. Se AD for a bissetriz interna relativa ao vértive A e $b_A=\overline{AD}$ (acompanhe na figura 3), então vale a fórmula:*

$$b_A=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}, \tag{5}$$

em que $p=\frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC.

Portal OBMEP

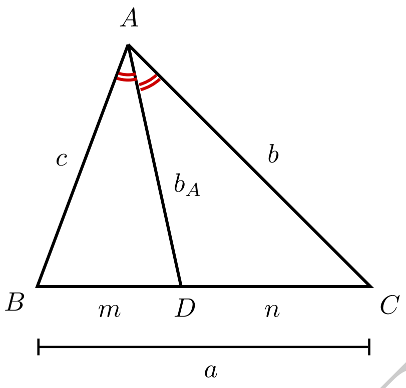


Figura 3: calculando as bissetrizes internas.

Prova. Denotando $\overline{BD} = m$, $\overline{CD} = n$ e invocando o Teorema da Bissetriz Interna, temos:

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b}.$$

Como $a = m + n$, temos $n = a - m$, de sorte que, a partir da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{c} = \frac{a-m}{b} &\Longrightarrow bm = ac - mc \\ &\Longrightarrow bm + cm = ac \\ &\Longrightarrow m(b+c) = ac \\ &\Longrightarrow m = \frac{ac}{b+c}. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo essa expressão para m na relação $n = a - m$, chegamos facilmente a:

$$n = \frac{ab}{b+c}. \tag{7}$$

Agora, aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABC e utilizando as fórmulas (6) e (7), obtemos sucessivamente:

$$b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} = a\left(b_A^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}\right) \therefore$$

Portal OBMEP

$$\frac{ab^2c + abc^2}{b+c} = a\left(b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right) \therefore$$

$$\frac{\cancel{a}bc(\cancel{b+c})}{\cancel{b+c}} = \cancel{a}\left(b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right) \therefore$$

$$bc = b_A^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Então, utilizando novamente um pouco de álgebra elementar, temos:

$$\begin{aligned} b_A^2 &= bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc(b+c)^2 - a^2bc}{(b+c)^2} \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot \left[(b+c)^2 - a^2\right] \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot (b+c+a) \cdot (b+c-a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 2p \cdot (2p - 2a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a). \end{aligned}$$

Por fim, extraindo raízes quadradas em ambos os membros da igualdade

$$b_A^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a),$$

chegamos a (5). $\square$

Como no caso das medianas, o leitor deve perceber que há fórmulas análogas para os comprimentos b_B e b_C das bissetrizes internas relativas aos vértices B e C de ABC, respectivamente:

$$b_B = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

Portal OBMEP

e

$$b_C = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}.$$

Terminamos este material discutindo, no exemplo a seguir, o análogo do exemplo anterior para bissetrizes externas. Nesse caso, porém, observe que temos uma suposição adicional.

Exemplo 6. *Seja ABC um triângulo com $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$, e tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se AD for a bissetriz externa relativa ao vértive A e $e_A = \overline{AD}$ (acompanhe na figura a seguir), então vale a fórmula:*

$$e_A = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-c)(p-b)}, \tag{8}$$

em que $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro de ABC.

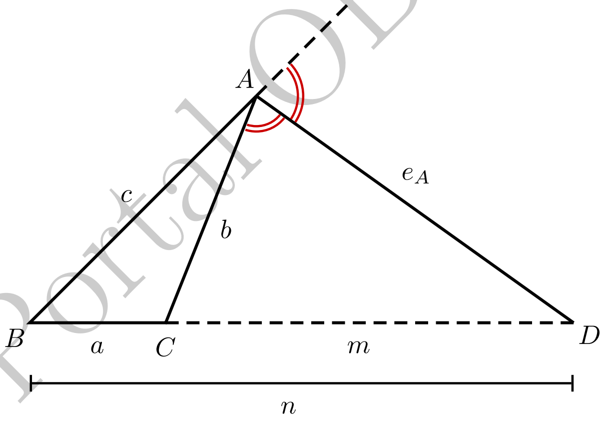


Figura 4: calculando as bissetrizes externas.

Solução. Procedemos como na demonstração do exemplo anterior, supondo $c > b$ e observando que o caso $c < b$ pode ser analisado de forma idêntica.

Portal OBMEP

Veja que a suposição $c > b$ implica que o ponto D está situado, nas notações da figura acima, *à direita de* C (isto é, de tal modo que C pertence ao segmento BD). Então, pondo $\overline{CD} = m$ e $\overline{BD} = n$, temos pelo Teorema da Bissetriz Externa que:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Agora, como $n = a + m$, a igualdade acima fornece

$$\begin{aligned} \frac{m}{b} = \frac{a+m}{c} &\Longrightarrow mc = ab + mb \\ &\Longrightarrow mc - mb = ab \\ &\Longrightarrow m(c-b) = ab \\ &\Longrightarrow m = \frac{ab}{c-b}. \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo $m = \frac{ab}{c-b}$ em $n = a + m$, obtemos facilmente:

$$n = \frac{ac}{c-b}. \tag{10}$$

Aplicando a Relação de Stewart ao triângulo ABD e utilizando as fórmulas (9) e (10), obtemos:

$$c^2m + e_A^2 a = n\left(b^2 + am\right) \;\therefore$$

$$c^2m + e_A^2 a = nb^2 + nam \;\therefore$$

$$c^2 \cdot \frac{ab}{c-b} + e_A^2 a = \frac{ac}{c-b} \cdot b^2 + \frac{ab}{c-b} \cdot a \cdot \frac{ac}{c-b}.$$

Colocando a em evidência em ambos os membros acima, chegamos a

$$\cancel{a}\left(\frac{c^2b}{c-b} + e_A^2\right) = \cancel{a}\left(\frac{b^2c}{c-b} + \frac{ab}{c-b} \cdot \frac{ac}{c-b}\right),$$

logo,

$$\frac{c^2b}{c-b} + e_A^2 = \frac{b^2c}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2}.$$

Portal OBMEP

Então,

$$\begin{aligned}
e_A^2 &= \frac{b^2c}{c-b} - \frac{c^2b}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2}\\
&= \frac{bc(b-c)}{c-b} + \frac{a^2bc}{(c-b)^2}\\
&= \frac{bc(b-c)(c-b) + a^2bc}{(c-b)^2}\\
&= \frac{-bc\,(b-c)^2 + a^2bc}{(c-b)^2}\\
&= \frac{bc\left[a^2-(b-c)^2\right]}{(c-b)^2}\\
&= \frac{bc(a+b-c)(a-b+c)}{(c-b)^2}\\
&= \frac{bc\,(2p-2c)\,(2p-2b)}{(c-b)^2}\\
&= \frac{4bc(p-c)(p-b)}{(c-b)^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, extraindo raízes quadradas em ambos os membros, obtemos (8). $\square$

Ainda em relação ao exemplo anterior, perceba que a suposição de que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ foi necessária para garantir a existência do ponto D. Realmente se tivéssemos $\overline{AB} = \overline{AC}$, então não seria difícil demonstrar que a bissetriz externa relativa a A seria paralela à reta suporte do lado BC, de forma que o ponto D não existiria.

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Ao explicar a Relação de Stewart, ressalte a Observação 2, pois quando os alunos estudaram as relações métricas em triângulos retângulos é provável que tenham feito perguntas do tipo:

Portal OBMEP

“e se o triângulo não for retângulo?” Ou ainda, “e se fosse outra ceviana, em vez da altura”? Essa é a hora de explicar que a Relação de Stewart responde a essas perguntas mais gerais. Uma fórmula para a medida da altura em função da medida dos lados de um triângulo qualquer também pode ser deduzida a partir da Relação de Stewart, mas é mais fácil deduzi-la a partir da já conhecida fórmula de Herão. (Como!?)

As referências a seguir contêm mais exemplos e problemas, de variados graus de dificuldade, envolvendo as leis dos senos e cossenos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2022.

2. G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* São paulo, Editora Atual, 2013.

Portal OBMEP