Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Funções Contínuas

Exercícios - Parte I

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

12 de Maio de 2024

Nesta aula, apresentaremos uma variedade de exemplos relacionados à noção de função contínua, enfatizando o Teorema do Valor Intermediário (TVI).

1 Exemplos

Exemplo 1. *Se $f : [0,1] \to [0,1]$ é contínua, sabemos que o gráfico de f deve intersectar a diagonal $x = y$. Mostre que o gráfico de f também intersecta a outra diagonal (do quadrado $[0,1] \times [0,1]$) $x + y = 1$.*

1ª Solução. O gráfico de f intersecta a diagonal $x + y = 1$ se, e só se, vale $f(x) + x = 1$ para algum $x \in [0,1]$. Definindo a função contínua $g : [0,1] \to [0,1]$ por $g(x) = f(1-x)$, vemos que $f(x) = g(1-x)$ e, portanto, a condição $f(x) + x = 1$ equivale a $g(1-x) = 1-x$.

Como o gráfico de g intersecta a diagonal $x = y$, num ponto de abscissa $x_0 \in [0,1]$, digamos, segue que $g(x_0) = x_0$, ou seja, $g(1-x_1) = 1-x_1$, sendo $x_1 = 1-x_0$ um ponto de $[0,1]$.

Pelo argumento acima, vemos que $f(x_1) + x_1 = 1$, de sorte que $(x_1,f(x_1))$ é um ponto da interseção do gráfico de f com a diagonal $x + y = 1$. □

2ª Solução. Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por $\phi(x) = 1 - x - f(x)$. Afirmamos que ϕ possui algum zero, ou seja, vale $\phi(c) = 0$ para algum $c \in [0,1]$.

De fato, temos $\phi(0) = 1 - f(0) \geq 0$ e $\phi(1) = -f(1) \leq 0$. Se qualquer uma dessas desigualdade for uma igualdade, segue a afirmação. Caso contrário, teremos $\phi(0) > 0 > \phi(1)$ e o TVI garante a existência de $c \in [0,1]$ tal que $\phi(c) = 0$.

Portanto, $f(c)+c = 1$ e o gráfico de f intersecta a diagonal $x + y = 1$. □

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(f(x)) \cdot f(x) = 1$, para cada x real. Sabendo que $f(1000) = 999$, calcule $f(500)$.*

Solução. A ideia do problema é simples: restrita à imagem, f coincide com a função recíproco. De fato, se $y = f(x)$, então

$$f(y) \cdot y = f(f(x)) \cdot f(x) = 1 \Rightarrow f(y) = \frac{1}{y}.$$

Assim, podemos calcular qualquer valor $f(y)$ desde que $y \in \mathrm{Im}(f)$. Aliás, pelo TVI, a última pertinência será verdadeira se y for um valor intermediário de f.

Pois bem, como 999 é um ponto da imagem, vale $f(999) = 1/999$. Sendo $1/999 = f(999) < 500 < f(1000) < 999$, segue do exposto que $500 \in \mathrm{Im}(f)$, de sorte que $f(500) = 1/500$. $\square$

Exemplo 3. *Sejam I um intervalo e $f,g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in I$, prove que $f < g$ ou $f > g$.*

Solução. Argumentemos por contradição. Negar as relações "$f < g$" e "$f > g$" significa assumir a existência de pontos $a,b \in I$ satisfazendo $f(a) \geq g(a)$, $f(b) \leq g(b)$. Pela condição $f(x) \neq g(x), x \in I$, segue que $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$.

Assim, a função $h : I \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = g(x) - f(x)$, é contínua e admite 0 como valor intermediário, pois $h(a) < 0 < h(b)$. Pelo TVI, existe $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, $f(c) = g(c)$, contradizendo a hipótese. $\square$

Exemplo 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo, para todo x real, a relação*

$$f(x)f(x+2) + f(x+1)^2 = 0.$$

Mostre que a equação $f(x) = 0$ admite infinitas soluções.

Solução. Basta mostrar que, para cada $a \in \mathbb{R}$, o intervalo $[a,a+2]$ contém alguma solução x_a de $f(x) = 0$. Realmente, se assim for, então $x_1 < x_4 < x_7 < \ldots < x_{1+3n} < \ldots$ será uma sequência infinita de soluções de $f(x) = 0$.

Para o que resta, devemos notar que

$$f(a)f(a+2) = -f(a+1)^2 \leq 0$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Se $f(a) = 0$ ou $f(a+2) = 0$, acabamos. Caso contrário, vale $f(a)f(a+2) < 0$, ou seja, $f(a)$ e $f(a+2)$ têm sinais contrários, o que implica dizer que 0 é um valor intermediário de f. Pelo TVI, existe x_a entre a e $a+2$ com $f(x_a) = 0$. $\square$

Exemplo 5. *Dados n números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no intervalo $[0,1]$, mostre que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que*

$$|x_0 - x_1| + |x_0 - x_2| + \cdots + |x_0 - x_n| = \frac{n}{2}.$$

Solução. Defina a função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|.$$

Precisamos mostrar que $f(x_0) = n/2$ para algum ponto x_0 no intervalo $[0,1]$.

Se $f(0) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n/2$, acabamos (basta pôr $x_0 = 0$). Caso contrário,

$$f(1) = (1 - x_1) + (1 - x_2) + \cdots + (1 - x_n) = n - f(0)$$

também é diferente de $n/2$. Assim, a igualdade $f(0) + f(1) = n$ impede que tenhamos $f(0), f(1) < n/2$ ou $f(0), f(1) > n/2$, de sorte que

$$f(0) < n/2 < f(1) \quad \text{ou} \quad f(0) > n/2 > f(1).$$

Em qualquer caso, $n/2$ é um valor intermediário de f. Pelo TVI, existe $x_0 \in (0,1)$ com $f(x_0) = n/2$, que é a conclusão desejada. $\square$

Para o que segue, dizemos que $Y \subset X$ é *denso* em X se, dado $x \in X$ e fixada uma margem de erro arbitrária $\varepsilon > 0$, existe $y \in Y$ tal que $|x - y| < \varepsilon$. Equivalentemente, Y é *denso* em X se a "função distância a Y" (veja o enunciado do exemplo 6 e a discussão que o precede) se anula em X.

Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, uma vez que todo real pode ser aproximado por racionais tão bem como desejarmos (basta truncar sua representação decimal); também, o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

dos irracionais é denso em $\mathbb{R}$. Com efeito, dados $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, existe algum racional r satisfazendo $|(x - \sqrt{2}) - r| < \varepsilon$, ou seja, $|x - s| < \varepsilon$, em que $s = r + \sqrt{2}$ é irracional.

Se $Y \subset \mathbb{R}$ e x é um número real, define-se a *distância* $d(x,Y)$, do ponto x ao conjunto Y, como o ínfimo das distâncias de x aos pontos de Y, ou seja,

$$d(x,Y) = \inf\{|x - y|\,;\, y \in Y\}.$$

Note que $d(x,Y) = 0$ sempre que $x \in Y$. Por outro lado, pode ocorrer de $d(x,Y)$ ser nulo sem que x pertença a Y. Por exemplo, $d(0,(0,1)) = 0$. Na verdade, a igualdade $d(x,Y) = 0$ significa que existem pontos de Y arbitrariamente próximos de x. Assim, $d(x,\mathbb{Q}) = 0$ para todo x real, uma vez que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo 6. *Fixe $Y \subset \mathbb{R}$. Mostre que a "função distância a Y", isto é, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,Y)$, é contínua.*

Solução. Mostremos que

$$|f(x) - f(y)| = |d(x,Y) - d(y,Y)| \leq |x - y| \tag{1}$$

para quaisquer reais x e y. Uma vez feito isso, a desigualdade acima implica a limitação das taxas de variação média da função f, de onde segue sua continuidade, de acordo com o exemplo 12 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III* desse módulo.

Se provarmos que

$$d(x,Y) - d(y,Y) \leq |x - y|, \tag{2}$$

uma inversão nos papeis de x e y fornecerá a desigualdade

$$d(y,Y) - d(x,Y) \leq |x - y|,$$

sendo que essas desigualdades equivalem a (1).

Para estabelecer (2), basta mostrar que

$$d(x,Y) < |x - y| + d(y,Y) + \varepsilon$$

para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ [1].

Ora, dado $\varepsilon > 0$, a definição de $d(y,Y)$ garante que o número $d(y,Y) + \varepsilon$ não pode ser cota inferior do conjunto das distâncias $|y - a|, a \in Y$ (pois $d(y,Y)$ já é a maior delas). Portanto, existe algum $x_0 \in Y$ tal que $|y - x_0| < d(y,Y) + \varepsilon$, de sorte que

$$\begin{aligned} d(x,Y) &\leq |x - x_0| \\ &\leq |x - y| + |y - x_0| \\ &< |x - y| + d(y,Y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

como desejado. □

Exemplo 7. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam*

$$G_\alpha = \{m + n\alpha \,|\, m,n \in \mathbb{Z}\}$$

e f a função distância a G_α (faça $Y = G_\alpha$ no exemplo anterior).

(i) Mostre que f é periódica e que 1 e α são períodos.

(ii) Se α é irracional, conclua o lema de Kronecker*: G_α é* denso *em $\mathbb{R}$.*

Solução. Fixemos um número real x e sejam

$$A := \{|x - a| \,;\, a \in G_\alpha\},$$

o conjunto das distâncias de x a pontos de G_α, e

$$B := \{|(x + 1) - a| \,;\, a \in G_\alpha\},$$

o conjunto das distâncias de $x + 1$ a pontos de G_α.

Escrevendo $a = m + n\alpha$, com $m,n \in \mathbb{Z}$, vemos que $a - 1 = (m - 1) + n\alpha$ e $a + 1 = (m + 1) + n\alpha$ pertencem a G_α. Daí, as igualdades $|x - a| = |x + 1 - (a + 1)|$ e $|(x + 1) - a| = |x - (a - 1)|$ mostram, respectivamente, que $A \subset B$ e $B \subset A$, isto é, $A = B$. Portanto,

$$f(x + 1) = \inf B = \inf A = f(x)$$

[1] Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ nessa desigualdade, obtemos (2).

e 1 é um período de f.

Substituindo 1 por α no argumento acima, algumas poucas modificações dão $f(x+\alpha) = f(x)$, de sorte que α também é um período de f.

Para o item (ii), basta repetir o argumento do exemplo 26 da aula *Continuidade em um ponto - Parte III*. Com efeito, f deve ser constante. Caso contrário, o fato de f ser contínua e periódica implicaria a existência de um menor período positivo T, sendo qualquer outro período de f um múltiplo inteiro de T (vide teorema 25 da aula citada). Daí, existiriam inteiros não nulos m,n tais que $\alpha = mT, 1 = nT$ e, portanto, $\alpha = m/n$, contradizendo a hipótese de que α é irracional.

Como f é constante e $f(1) = 0$ (pois $1 \in G_\alpha$), segue que f é identicamente nula. A densidade de G_α é, agora, imediata. Fixados x real e uma margem de erro $\varepsilon > 0$, a relação $f(x) = d(x,G_\alpha) = 0$ garante que ε não é cota inferior do conjunto das distâncias de x a pontos de G_α. Portanto, existe $y \in G_\alpha$ tal que $|x-y| < \varepsilon$. $\square$

Exemplo 8. *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}.$$

Prove que:

(a) *Se n for ímpar, então existe um ponto x_0 tal que $x_0^n + \phi(x_0) = 0$.*

(b) *Se n for par, então existe um ponto y_0 tal que $y_0^n + \phi(y_0) \le x^n + \phi(x)$ para todo x.*

Solução. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por $f(x) = x^n + \phi(x)$. Se n for ímpar, então $x^n \to -\infty$ quando $x \to -\infty$, de modo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^n\left(1 + \frac{\phi(x)}{x^n}\right)\\ &= (-\infty)\cdot(1+0) = -\infty.\end{aligned}$$

Se n for par, então $x^n \to +\infty$ quando $x \to -\infty$ e um cálculo análogo dá, nesse caso,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty,$$

para todo n, de onde segue a relação

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Para estabelecer o primeiro item, sendo n ímpar, observamos que o conjunto imagem de f é um intervalo (por que?) ilimitado inferior e superiormente, de acordo com os limites

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Assim, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, ou seja, f é sobrejetora. Em particular, 0 é um ponto da imagem, o que permite escrever $0 = f(x_0)$ para algum x_0 real. Logo, $x_0^n + \phi(x_0) = 0$.

Quanto ao segundo item, temos

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Daí, pela definição de limite, existe $A > 0$ tal que

$$|x| > A \Rightarrow f(x) > f(0).$$

Por outro lado, o teorema dos valores extremos garante a existência de um ponto de mínimo y_0 da restrição de f ao intervalo $[-A,A]$.

Afirmamos que y_0 é ponto de mínimo *global*. Com efeito, dado um real x, a desigualdade $f(x) \geq f(y_0)$ já vale caso x pertença a $[-A,A]$. Caso contrário, $|x| > A$ e, pela implicação acima, $f(x) > f(0)$. Sendo $f(0) \geq f(y_0)$, vemos que $|x| > A \Rightarrow f(x) > f(y_0)$, justificando a afirmação.

Portanto, para cada real x,

$$y_0^n + \phi(y_0) = f(y_0) \leq f(x) = x^n + \phi(x),$$

encerrando a demonstração. $\square$

Exemplo 9. *Se I é um intervalo, mostre que não existe função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ assumindo cada um dos seus valores exatamente duas vezes.*

Solução. Suponhamos que uma tal função f exista. Então, nenhum ponto a interior a I pode ser extremo local para f. Caso contrário, supondo que a seja um ponto de máximo local (o caso em que a é ponto de mínimo local é similar), existiria $\delta > 0$ tal que $[a-\delta,a+\delta] \subset I$ e

$$f(x) \leq f(a) \text{ para todo } x \in [a-\delta,a+\delta].$$

Se b for o outro ponto de I tal que $f(b) = f(a)$, então, diminuindo δ se necessário, podemos supor que $b \notin [a-\delta,a+\delta]$. Portanto,

$$x \in [a-\delta,a+\delta], x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a).$$

Se $m := \max\{f(a-\delta),f(a+\delta)\}$, então $m < f(a)$ e, daí, segue que $L := (m+f(a))/2$ é um valor intermediário de f sobre cada um dos intervalos $[a-\delta,a]$, $[a,a+\delta]$. De fato,

$$f(a-\delta),f(a+\delta) \leq m < \frac{m+f(a)}{2} = L < f(a).$$

Do mesmo modo, se $b < a-\delta$ (resp. $a+\delta < b$), então L também é um valor intermediário de f sobre $[b,a-\delta]$ (resp. $[a+\delta,b]$). Em particular, pelo TVI, o valor L seria assumido pelo menos três vezes, contradizendo a hipótese.

Por outro lado, a condição imposta sobre f permite tomar $c < d$ em I tais que $f(c) = f(d)$, sendo f não constante em $[c,d]$. Logo, o teorema dos valores extremos garante que $f|_{[c,d]}$ assume um valor mínimo ou máximo em um ponto a interior a $[c,d]$. Então, a seria um ponto de extremo local de f, o que, como vimos acima, é impossível.

$\square$

Se $I, J \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma função $f : I \to J$ é um *homeomorfismo entre I e J*, ou simplesmente um *homeomorfismo*, se f é uma bijeção contínua cuja inversa $f^{-1} : J \to I$

também é contínua. Nesse caso, é claro que f^{-1} é um homeomorfismo entre J e I. Além disso, uma vez que a composta de bijeções (resp. de funções contínuas) é uma bijeção (resp. uma função contínua), concluímos que a composta de homeomorfismos ainda é um homeomorfismo.

Por exemplo, toda função afim não constante é um homeomorfimo entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$. A função exponencial é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $(0, +\infty)$. Também, a regra $f(x) = x^n$, em que $n \neq 0$ é um inteiro fixado, define um homeomorfismo entre $(0, +\infty)$ e $(0, +\infty)$. Em particular, a função $h : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, definida por $h(x) = e^{2x-3}$, é um homeomorfismo, pois é a composta dos homeomorfismos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por $f(x) = 2x - 3$, e $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

Um critério útil é o seguinte: *se I for um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ for contínua e injetiva, então f é um homeomorfismo entre I e $J = f(I)$* (que também é um intervalo, pelo corolário 2 da aula anterior). Além disso, f é estritamente monótona. Essa última afirmação e a continuidade da inversa f^{-1} seguem, respectivamente, do exemplo 15 e do teorema 12 da aula passada.

Exemplo 10. *Considere a cúbica $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Se $b^2 \leq 3c$, mostre que f define um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$.*

Solução. Seja $m_f(x) = 3x^2 + 2bx + c, x \in \mathbb{R}$. De acordo com a aula *Funções Racionais*, no módulo *Leis do Limite - Parte 2*, $m_f(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x,f(x))$. Pelo exemplo 10 da mesma aula, se m_f for positiva em um certo intervalo I, então a função f deve ser crescente no intervalo fechado de mesmos extremos que I.

Pois bem, m_f é uma função quadrática com discriminante não positivo, pois

$$(2b)^2 - 4 \cdot 3 \cdot c \leq 0 \Leftrightarrow b^2 \leq 3c,$$

sendo verdadeira a última desigualdade por hipótese. Assim, $m_f \geq 0$. Mais precisamente, se x_0 for o ponto de mínimo global de m_f, sabemos que essa função é positiva nos intervalos abertos $(-\infty,x_0)$ e $(x_0, +\infty)$, de modo que f é crescente em cada um dos intervalos fechados $(-\infty,x_0]$ e $[x_0,+\infty)$, ou seja, f é crescente. Pela discussão anterior ao exemplo, f é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ e sua imagem $f(\mathbb{R})$.

Para finalizar, basta mostrar que f é sobrejetiva, isto é, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Mas isso segue da observação que antecede o exemplo 3 da aula anterior, qual seja, *toda função polinomial de grau ímpar é sobrejetora.* $\square$

Exemplo 11. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $g^{(n)} = \mathrm{Id}$, em que $g^{(n)}$ é a composição de n fatores iguais a g (e $g^{(1)} = g$ por definição), mostre que g é uma involução, ou seja, $g^{(2)} = \mathrm{Id}$. Além disso, mostre que toda involução (contínua) é a identidade ou é decrescente.*

Solução. Como $g^{(n-1)} \circ g = g^{(n)} = g \circ g^{(n-1)}$, a condição $g^{(n)} = \mathrm{Id}$ pode ser traduzida como "g é invertível e sua inversa é $g^{(n-1)}$" (em particular, g é um homeomorfismo). Daí, g é estritamente monótona e, certamente, $h := g^{(2)}$ é crescente. Observe que h satisfaz a mesma condição que g, pois

$$\begin{aligned} h^{(n)} &= (g \circ g) \circ \cdots \circ (g \circ g) \\ &= g^{(n)} \circ g^{(n)} = \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

`Afirmação`: $h = \mathrm{Id}$ (e, portanto, $g^{(2)}$ é a identidade).

Com efeito, digamos que fosse $h(x) > x$ para algum x real. Logo, o fato de h ser crescente implicaria

$$\begin{aligned} &h^{(2)}(x) = h(h(x)) > h(x), \\ &h^{(3)}(x) = h(h^2(x)) > h(h(x)) = h^{(2)}(x) \end{aligned}$$

e assim por diante, conduzindo ao absurdo

$$x < h(x) < h^{(2)}(x) < \cdots < h^{(n)}(x) = x.$$

Do mesmo modo, não é possível que tenhamos $h(x) < x$, para um certo x, ou seja, vale a afirmação. $\square$

Perceba que o argumento acima mostrou que as condições "$h^{(n)} = \mathrm{Id}$" e "h é crescente" implicam a relação $h = \mathrm{Id}$. Daí, qualquer involução contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ há de ser a identidade se for crescente. Se não for crescente, sua monotonicidade estrita obrigará que seja decrescente. $\square$

Exemplo 12. *Para cada $c \in (0,1)$ mostre que existe um único $f(c) \in (0,1)$ tal que $c^{f(c)} = f(c)$. Além disso, prove que a função induzida $f : (0,1) \to (0,1)$, $x^{f(x)} = f(x)$, é um homeomorfismo crescente.*

Solução. Fixado $c \in (0,1)$, a regra $g(x) = c^x - x$ define uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal modo que

$$g(0) = 1 > 0 > c - 1 = g(1).$$

Pelo TVI, existe $f(c) \in (0,1)$ satisfazendo $c^{f(c)} - f(c) = g(f(c)) = 0$, como desejado. Para ver que $f(c)$ é único, basta notar que g é injetiva, o que segue do fato de g ser decrescente, pois é a soma da exponencial de base c com o oposto da identidade, duas funções decrescentes.

Agora, vejamos que f é crescente. Para isso, note que a expressão y^z, com $0 < y < 1$ e $z > 0$, é uma função crescente da variável y e uma função decrescente da variável z. Desse modo, afirmamos que

$$0 < x < y < 1 \Rightarrow f(x) < f(y).$$

De fato, se fosse $f(x) \geq f(y)$, teríamos

$$f(y) = y^{f(y)} \geq y^{f(x)} > x^{f(x)} = f(x),$$

uma contradição. Como, além de crescente, f é limitada, fixado $x_0 \in (0,1)$ existe

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

com $0 < L < 1$.

Fazendo $x \to x_0$ na igualdade $f(x) \cdot \ln x = \ln f(x)$, oriunda de $x^{f(x)} = f(x)$ pela avaliação da função logaritmo natural em ambos os membros, obtemos

$$L \cdot \ln x_0 = \ln L,$$

o que implica $x_0^L = L$, ou melhor, $L = f(x_0)$ por unicidade. Provamos, assim, que f é contínua. Além disso, o leitor pode verificar, seguindo o raciocínio acima, que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1. \tag{3}$$

Por exemplo, se $L = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, um número não negativo, fosse não nulo, o argumento acima mostraria que

$$\ln L = L \cdot \lim_{x\to 0^+} \ln x = L \cdot (-\infty) = -\infty,$$

o que é absurdo.

Os limites em (3) mostram que $f((0,1))$, um subintervalo de $(0,1)$, é o próprio $(0,1)$. Portanto, $f : (0,1) \to (0,1)$ é uma bijeção contínua cuja inversa é, necessariamente, contínua (vide exemplo 15 da aula anterior). Portanto, f é um homeomorfismo. $\square$

Exemplo 13 (OBMU/2022, Problema 1). *Dado $0 < a < 1$, determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínuas em $x = 0$ e tais que $f(x) + f(ax) = x$, para todo x real.*

Solução. Fazendo $x = 0$ na equação funcional, vem que $f(0) + f(0) = 0$, de sorte que $f(0) = 0$. Agora, vamos calcular, de dois modos, a soma telescópica

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (f(a^i x) + f(a^{i+1}x)).$$

Por um lado, essa soma é

$$\begin{aligned}
&(f(x) + \cancel{f(ax)}) - (\cancel{f(ax)} + \cancel{f(a^2x)}) + \cdots \\
&+ (-1)^{n-1}(\cancel{f(a^{n-1}x)} + f(a^n x)) \\
= \ & f(x) + (-1)^{n-1} f(a^n x).
\end{aligned}$$

Por outro, utilizando a equação funcional, ela também vale

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a^i x &= x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-a)^i \\
&= x \cdot \frac{1 - (-a)^n}{1 + a},
\end{aligned}$$

em que, na última igualdade, utilizamos a identidade

$$1 + b + \cdots + b^{n-1} = \frac{1 - b^n}{1 - b},$$

com $b = -a$. Portanto,

$$f(x) + (-1)^{n-1} f(a^n x) = x \cdot \frac{1 - (-a)^n}{1 + a}, \qquad (4)$$

para todo x real e para cada n natural.

Sendo $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$, pois $0 < a < 1$ [2], seguem as igualdades

$$\lim_{n \to \infty} a^n x = 0 = \lim_{n \to \infty} (-a)^n.$$

Daí, como f é contínua na origem, temos que $\lim_{n \to \infty} f(a^n x) = f(0) = 0$, de sorte que $\lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1} f(a^n x) = 0$. Assim, fazendo $n \to \infty$ na igualdade (4), vem que

$$f(x) + 0 = x \cdot \frac{1 - 0}{1 + a} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1 + a}.$$

Por fim, observando que a função linear $x \mapsto \frac{x}{1+a}$ realmente satisfaz a equação funcional dada, concluímos que ela é a única solução. □

Dicas para o Professor

O argumento que permitiu a prova do item (a) no exemplo 8 é, essencialmente, uma réplica do argumento utilizado para provar que qualquer polinômio de grau ímpar admite uma raiz real (vide aula anterior). E, como era de se esperar, aquele resultado implica esse. De fato, dado um polinômio (mônico) p de grau n, escreva $p(x) = x^n + \phi(x)$, sendo ϕ um polinômio de grau menor que n. Então,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$$

[2] Vide relação (13) da aula anterior.

e as hipóteses do exemplo 8 se cumprem. Atentando ao fato de que p assume o papel da função f na demonstração daquele exemplo, vemos que:

(i) se n for ímpar, então existe x_0 tal que $p(x_0) = x_0^n + \phi(x_0) = 0$, ou seja, x_0 é uma raiz real de p;

(ii) se n for par, então p admite um ponto de mínimo global.

Mais geralmente, as mesmas ideias empregadas para estabelecer o item (b) no exemplo 8 permitem o seguinte resultado: *se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua e*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty,$$

então f *admite um ponto de mínimo global.*

Os exemplos 1, 8 e 9 foram retirados de [2], enquanto os exemplos 2, 4 (adaptado) e 5 foram extraídos de [1]. Aliás, para uma aplicação geométrica do lema de Kronecker (exemplo 7), confira o exemplo 3.36 da 1ª referência.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 3. Introdução à Análise.* 3ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. M. Spivak. *Calculus.* 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.