

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Teorema do Valor Médio - Parte VI

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de Fevereiro de 2026



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Continuamos apresentando exemplos e resultados relacionados ao Teorema do Valor Médio.

Exemplo 1 (OBMU - 2006, 1ª Fase). *Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ duas vezes derivável, com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e*

$$1 + f(x) = \frac{1}{f''(x)}, \forall x \in [0, 1],$$

mostre que $f(1) < \frac{3}{2}$.

Solução. Por hipótese, $(1 + f) \cdot f'' \equiv 1$ em $[0, 1]$. Como a função $1 + f$ é positiva nesse intervalo, o mesmo se pode dizer da segunda derivada f'' , de onde se conclui que f' é crescente em $[0, 1]$. Assim, para todo x nesse intervalo, $f'(x) \geq f'(0) = 1$, o que implica $f' > 0$ em $[0, 1]$. Portanto, f é crescente e, conseqüentemente, $f'' = 1/(1 + f)$ é decrescente naquele intervalo. Em particular, $0 < c < 1 \Rightarrow f''(c) < f''(0) = 1$.

Com essas observações, vem o arremate: pelo teorema de Taylor com resto de Lagrange aplicado a $f|_{[0,1]}$, existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + f'(0) \cdot 1 + \frac{f''(c)}{2} \cdot 1^2 \\ &< 0 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Uma partícula se move em um eixo de tal forma que, entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$, seu deslocamento foi unitário. Se naqueles instantes a partícula estava em repouso, prove que sua aceleração escalar foi maior ou igual a 4 em algum instante entre 0 e 1.*

Solução. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a partícula repousasse na origem no instante $t = 0$ e que o deslocamento (total) tenha ocorrido no sentido positivo do eixo. Com essas convenções, se $s = s(t)$ for a função posição da partícula, as hipóteses do exemplo significam que $s(0) = 0$, $s(1) = 1$ e $s'(0) = s'(1) = 0$.

Seja $t_0 \in (0, 1)$ um instante tal que $s(t_0) = 1/2$. (A existência de t_0 segue do TVI, haja vista que $s(0) = 0 < 1/2 < 1 = s(1)$ e, como ocorre implicitamente sempre que consideramos a descrição cinemática do movimento, a partícula não deu pulos.)

Se for $t_0 \leq 1/2$, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange garante a existência de $c \in (0, t_0)$ satisfazendo

$$s(t_0) = s(0) + s'(0) \cdot t_0 + \frac{s''(c)}{2} \cdot t_0^2.$$

Substituindo os valores de $s(t_0)$, $s(0)$ e $s'(0)$, vem que

$$\frac{s''(c)}{2} \cdot t_0^2 = \frac{1}{2},$$

o que implica $s''(c) = t_0^{-2} \geq 4$. Portanto, a aceleração do móvel no instante c é maior que ou igual a 4.

Se tivéssemos $t_0 > 1/2$, argumentaríamos de forma similar a partir da fórmula

$$s(t_0) = s(1) + s'(1) \cdot (t_0 - 1) + \frac{s''(c)}{2} \cdot (t_0 - 1)^2,$$

em que, agora, $c \in (t_0, 1)$. A conclusão seria de que $s''(c) = -(t_0 - 1)^{-2} \leq -4$, de sorte que o móvel possuiria aceleração escalar $|s''(c)| \geq 4$ no instante c . $\square$

Exemplo 3. *Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em (a, b) . Prove que existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{1}{a - c} < \phi'(c) < \frac{1}{b - c}. \quad (1)$$

Solução. Observando que o primeiro membro de (1) é negativo, enquanto o terceiro é positivo, vemos que todo ponto crítico $c \in (a, b)$ de ϕ satisfaz a relação do enunciado. Mais explicitamente, se $\phi'(c) = 0$, então (1) será satisfeita.

Falta analisar o caso em que ϕ' nunca se anula, o que, pelo teorema de Darboux, equivale a $\phi' > 0$ ou $\phi' < 0$.

Tratando inicialmente da 1ª situação, a desigualdade à esquerda em (1) é trivialmente satisfeita, restando estabelecer a desigualdade à direita.

Para isso, seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{\phi(x)}(b-x)$. Pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Sendo $f(b) = 0$ e $f'(c) = e^{\phi(c)}(\phi'(c)(b-c) - 1)$, a igualdade acima reduz-se a

$$e^{\phi(c)}(\phi'(c)(b-c) - 1)(b-a) = -e^{\phi(a)}(b-a),$$

de onde se conclui que

$$\phi'(c)(b-c) - 1 = -e^{\phi(a)-\phi(c)} < 0.$$

Daí, a segunda desigualdade em (1) segue imediatamente.

Caso tivéssemos $\phi' < 0$, bastaria repetir o argumento com a função auxiliar $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela regra $f(x) = e^{\phi(x)}(x-a)$. $\square$

O próximo resultado é conhecido na literatura como *teorema do valor médio para diferenças finitas*¹

Teorema 4. *Sejam I um intervalo, n um inteiro positivo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n-1} , n vezes derivável no interior de I . Se $a \in I$ e $h \neq 0$ forem números reais tais que $a + nh \in I$, existirá c no intervalo aberto de extremos a e $a + nh$ tal que*

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(a + (n-i)h) = f^{(n)}(c)h^n. \quad (2)$$

Prova. Não faremos todos os detalhes da prova, a qual consiste de indução em n .

O caso $n = 1$ corresponde ao TVM. Para o passo de indução, suponhamos $n > 1$ e a validade do resultado para funções de classe C^{n-2} , $n-1$ vezes deriváveis no interior de seu intervalo-domínio. Dada $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as

¹Para mais sobre o emprego de diferenças finitas em Análise Numérica, veja o capítulo 15 da referência [1], em particular a seção 15.11.

hipóteses do teorema, sejam J o intervalo fechado de extremidades a , $a + h$ e $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida pela regra

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} f(x + (n-1-i)h).$$

Deixaremos como tarefa ao leitor verificar que o primeiro membro da relação (2) consiste da diferença $g(a+h) - g(a)$, ou seja,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(a + (n-i)h) = g(a+h) - g(a).^2 \quad (3)$$

Tendo g a mesma classe de diferenciabilidade de f , relativamente a J e ao interior de J , podemos, em particular, utilizar o TVM para a restrição $g|_J$, obtendo

$$g(a+h) - g(a) = g'(u) \cdot h,$$

para algum ponto u interior a J . Assim, por (3) e pela definição de g , vem que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(a + (n-i)h) &= \\ &= h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} f'(u + (n-1-i)h). \end{aligned} \quad (4)$$

Agora, pela hipótese de indução aplicada a f' , ao ponto u , ao mesmo incremento h e à ordem de diferenciabilidade $n-1$, temos

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} f'(u + (n-1-i)h) = (f')^{(n-1)}(c) \cdot h^{n-1},$$

em que c é um ponto do intervalo aberto de extremidades u e $u + (n-1)h$ (e, portanto, um ponto do intervalo aberto de extremidades a e $a + nh$).

²Se você já demonstrou a fórmula do binômio de Newton por indução, está em vantagem!

Como $(f')^{(n-1)}(c) = f^{(n)}(c)$, o resultado segue da igualdade do parágrafo anterior e de (4). $\square$

Exemplo 5 (Putnam - 1971). *Seja α um número real tal que n^α é um inteiro para todo inteiro positivo n . Mostre que α é um inteiro não negativo.*

Solução. Como 2^α é inteiro, necessariamente positivo, temos $2^\alpha \geq 1$, o que acarreta $\alpha \geq 0$. Seja n o menor inteiro positivo maior que α , de modo que $n - 1 \leq \alpha < n$. (Note que $n - 1$ é a *parte inteira* de α .) A solução estará completa se mostrarmos que $\alpha = n - 1$.

Uma observação simples, mas pertinente, é que

$$\alpha - n < 0 \leq \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1)). \quad (5)$$

Da primeira desigualdade, segue que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-n} = 0$, o que permite tomar um inteiro positivo N satisfazendo

$$0 \leq \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1))N^{\alpha-n} < 1. \quad (6)$$

Realmente, (6) ocorre para todo $N \in \mathbb{N}$ se $\alpha = n - 1$. Caso contrário, teremos $\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1)) > 0$ e basta escolher N de modo a ter

$$N^{\alpha-n} < \frac{1}{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1))}.$$

Agora, considere a função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^\alpha$. Por um lado, f é suave; por outro, a hipótese do problema significa que $f(k)$ é um inteiro positivo sempre que k o for. Então, aplicando o teorema 4 com $a = N$ e $h = 1$, obtemos $c > N$ tal que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(N + n - i) = f^{(n)}(c). \quad (7)$$

O segundo membro da relação acima é um real não negativo, por conta da fórmula

$$f^{(n)}(c) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - (n - 1))c^{\alpha-n}. \quad (8)$$

Utilizando as duas igualdades anteriores e as desigualdades $c^{\alpha-n} < N^{\alpha-n}$ e (6), chegamos a

$$0 \leq \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(N+n-i) < 1,$$

sendo essa soma um inteiro, pelas hipóteses.

Portanto, tal soma tem de ser nula, de modo que (7) implica $f^{(n)}(c) = 0$; então, (8) dá $\alpha = n - 1$. $\square$

O lema abaixo consta do Exemplo 2 da aula *Exercícios - Parte IV*, do módulo *Derivadas de Funções Trigonométricas*. Aqui, forneceremos uma outra demonstração, baseada na fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

Lema 6. Para cada $x \in (0, 1)$, prove que

$$\text{sen } \pi x > \pi x(1-x).$$

Prova. É suficiente estabelecer a desigualdade acima para $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Realmente, definindo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \text{sen } \pi x - \pi x(1-x),$$

a desigualdade proposta se reescreve na forma $f(x) > 0$, $x \in (0, 1)$. Todavia, como o leitor pode verificar, o gráfico de f é simétrico em relação à reta vertical $x = 1/2$, ou seja, vale $f(1-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, se já soubermos que $f > 0$ em $(0, \frac{1}{2}]$ e $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ for dado, teremos $1-x \in (0, \frac{1}{2}]$ e, portanto, $f(x) = f(1-x) > 0$.

Para mostrar que $f > 0$ no intervalo $(0, \frac{1}{2}]$, fixamos $0 < x \leq \frac{1}{2}$ e aplicamos a fórmula de Taylor com resto de Lagrange para $f = \text{sen}$, $a = 0$, $b = \pi x$ e $n = 5$. Daí, seguirá a existência de $c \in (0, \pi x)$ tal que

$$\begin{aligned} \text{sen } \pi x &= \text{sen } 0 + \text{sen}' 0 \cdot \pi x + \frac{\text{sen}'' 0}{2} \cdot (\pi x)^2 \\ &\quad + \frac{\text{sen}''' 0}{6} \cdot (\pi x)^3 + \frac{\text{sen}^{(iv)} 0}{24} \cdot (\pi x)^4 + \frac{\text{sen}^{(v)} c}{120} \cdot (\pi x)^5. \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas da função seno, segue que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \pi x &= \pi x - \frac{(\pi x)^3}{6} + \frac{(\pi x)^5 \cos c}{120} \\ &> \pi x - \frac{(\pi x)^3}{6},\end{aligned}$$

pois $\cos c > 0$, já que $0 < c < \pi x \leq \pi/2$. Isto posto, basta provar que

$$\pi x - \frac{(\pi x)^3}{6} > \pi x(1 - x),$$

ou, de forma equivalente,

$$1 - \frac{(\pi x)^2}{6} > 1 - x.$$

Essa última desigualdade se simplifica para $\frac{\pi^2 x}{6} < 1$, o que é verdade, haja vista que, sendo $\pi^2 < 10$ e $x \leq 1/2$, temos

$$\frac{\pi^2 x}{6} < \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{6} < 1.$$

Logo, $f > 0$ em $(0, \frac{1}{2}]$ e a demonstração está encerrada. $\square$

Para o último exemplo, convém definir a noção de *elementos consecutivos* em um conjunto X de números reais: se $a < b$ pertencerem a X , diremos que a e b são consecutivos em X se $(a, b) \cap X = \emptyset$.

De outro modo, $a < b$ são consecutivos no conjunto X se $a, b \in X$ mas nenhum outro elemento de X estiver situado entre a e b . Nesse caso, dizemos que b é o *sucessor* de a ou que a é o *antecessor* de b em X .

Por exemplo, se X for o conjunto dos inversos dos números naturais, então $1/(n+1)$ é o antecessor de $1/n$ em X , para cada $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não admite elementos consecutivos. (Por que?)

Exemplo 7 (OBMU - 2014, 1ª Fase). *Seja D_n o conjunto dos racionais p/q com p, q inteiros, $0 < q \leq n$ e $0 \leq p \leq q$.*

(a) Dados $x, y \in D_n$ distintos e $n \geq 3$ inteiro, prove que

$$|\cos \pi x - \cos \pi y| > \pi^2/n^3. \quad (9)$$

(b) Para todos $c > \pi^2$ real e n_0 natural, prove que existem $n > n_0$ natural e $x, y \in D_n$ distintos tais que

$$|\cos \pi x - \cos \pi y| < c/n^3.$$

Solução. Naturalmente, $0 = \min D_n$ e $1 = \max D_n$, ao mesmo tempo que, relativamente a D_n , 0 é o antecessor de $1/n$ e 1 é o sucessor de $(n-1)/n$.

Observe que basta verificar a desigualdade (9) quando os pontos em D_n forem consecutivos.

Com efeito, se $x < y$ pertencerem a D_n , a finitude desse conjunto assegura que x admite um sucessor $z \in D_n$, com $x < z \leq y$. Como a função $t \mapsto \cos \pi t$ é decrescente no intervalo $[0, 1]$, vem que

$$|\cos \pi x - \cos \pi y| \geq |\cos \pi x - \cos \pi z|.$$

Logo, se o segundo membro dessa desigualdade for sempre maior que π^2/n^3 (o que equivale a admitir a veracidade de (9) quando os pontos em D_n forem consecutivos), o caso geral de (9) seguirá imediatamente.

Desse modo, nossa abordagem consistirá da análise dos casos em que $x = 0, y = 1/n$ ou $x = (n-1)/n, y = 1$, para os quais verificaremos a desigualdade *mais forte*

$$1 - \cos \pi/n > \frac{\pi^2}{n^3} \cdot \frac{(2n-1)^2}{8n},$$

seguindo pelo caso em que $1/n \leq x, y \leq (n-1)/n$.

Substituindo $x = \pi/2n$ na identidade $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, obtemos

$$1 - \cos \pi/n = 2 \sin^2 \pi/2n.$$

Por outro lado, o lema 6, com $x = 1/2n$, dá

$$\sin \pi/2n > \frac{\pi}{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right) = \frac{\pi(2n-1)}{4n^2},$$

permitindo escrever

$$\begin{aligned}1 - \cos \pi/n &= 2 \sin^2 \pi/2n \\&> 2 \cdot \frac{\pi^2(2n-1)^2}{16n^4} \\&= \frac{\pi^2}{n^3} \cdot \frac{(2n-1)^2}{8n} > \frac{\pi^2}{n^3}.\end{aligned}$$

(A última desigualdade é verdadeira porque $(2n-1)^2 > 8n$ para todo $n \geq 3$.)

Para completar a prova do item (a), demonstremos (9) quando $1/n \leq x, y \leq (n-1)/n$. Pelo TVM, temos

$$\cos \pi x - \cos \pi y = -\pi(x-y) \sin \pi z,$$

com z entre x e y . Logo, $\pi/n < \pi z < \pi - \pi/n$ e isso implica $\sin \pi z > \sin \pi/n$. Daí, uma outra aplicação do lema 6 fornece

$$|\cos \pi x - \cos \pi y| > \pi|x-y| \sin \pi/n > \pi^2 \cdot \frac{|x-y|(n-1)}{n^2}.$$

Se mostrarmos que $|x-y| \geq 1/n(n-1)$, a relação acima trará a conclusão desejada:

$$|\cos \pi x - \cos \pi y| > \pi^2 \cdot \frac{\frac{1}{n(n-1)} \cdot (n-1)}{n^2} = \frac{\pi^2}{n^3}.$$

Nesse sentido, escreva $x = a/b$, $y = p/q$ e suponha, sem perda de generalidade, que $b \geq q$. Caso seja $b = q$, valerá $a \neq p$ (pois $x \neq y$) e, daí,

$$|x-y| = \frac{|a-p|}{b} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{n(n-1)}.$$

Se for $b > q$, então $b \leq n \Rightarrow q \leq n-1$, de sorte que

$$|x-y| = \frac{|aq-bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq} \geq \frac{1}{n(n-1)},$$

como desejado.

Agora, voltemo-nos à prova do item (b). Afirmamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\cos \pi/n - \cos \pi/(n-1)) = \pi^2.$$

Com efeito, definindo

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2n(n-1)}, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{2n(n-1)},$$

as fórmulas trigonométricas de transformação de soma em produto asseguram que

$$\cos \pi/n - \cos \pi/(n-1) = 2 \operatorname{sen} \alpha_n \operatorname{sen} \beta_n$$

para todo natural n .

Note que $\alpha_n, \beta_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Mais ainda, a relação

$$\alpha_n \beta_n = \frac{\pi^2(2n-1)}{4n^2(n-1)^2}$$

mostra que $n^3 \alpha_n \beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi^2/2$. Portanto, com o limite trigonométrico fundamental em mente, calculamos

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n-1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^3 \operatorname{sen} \alpha_n \operatorname{sen} \beta_n \\ &= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^3 \alpha_n \beta_n \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n} \cdot \frac{\operatorname{sen} \beta_n}{\beta_n} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \pi^2, \end{aligned}$$

conforme queríamos. Assim, dados $c > \pi^2$ e n_0 natural, a desigualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (\cos \pi/n - \cos \pi/(n-1)) = \pi^2 < c$$

garante, via permanência do sinal, a existência de um natural $n > n_0$ tal que

$$0 < n^3 (\cos \pi/n - \cos \pi/(n-1)) < c;$$

em particular,

$$|\cos \pi/n - \cos \pi/(n-1)| < c/n^3$$

e o item (b) segue pondo-se $x = 1/n$, $y = 1/(n-1)$. $\square$

Dicas para o Professor

O leitor encontrará mais problemas sobre o teorema do valor médio nas referências abaixo ([2] e [3], em especial).

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. T. Apostol. *Cálculo*, volume 2. Barcelona, Reverté, 1981.
2. T. Andreescu. et al. *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus in the Real Axis*. New York: Springer, 2009.
3. P. K. Sahoo, T. Riedel. *Mean Value Theorems and Functional Equations*. Singapore: World Scientific, 1998.
4. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 3. Introdução à Análise*. 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
5. J. Stewart. *Cálculo*, volume 1. 5ª ed. Thomson, 2006.
6. M. Spivak. *Calculus*. 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.