Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Geométrica

Multiplicação de números complexos no plano de Argand-Gauss

Terceiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de agosto de 2020

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Interpretação geométrica da multiplicação em forma polar

Em módulos anteriores, aprendemos como multiplicar dois números complexos algebricamente usando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i.$$

Além disso, aprendemos como escrever um complexo em sua forma polar (também chamada forma trigonométrica): $z = r\operatorname{cis}(\theta)$. Agora, vamos mostrar como multiplicar dois números complexos usando sua forma trigonométrica e como interpretar esse resultado geometricamente. O objetivo é realizar o produto de modo mais simples, evitando ter de traduzir os complexos para a forma algébrica para aplicar a propriedade distributiva (como acima). Contudo, a fim de demonstrar a validade desse método mais simples, começaremos fazendo um caminho mais longo.

Em tudo o que segue, lembre-se de que $\operatorname{cis}(\theta)$ é uma abreviação para $\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta)$:

$$\operatorname{cis}(\theta)=\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta).$$

Exemplo 1. *Calcule o produto dos números complexos*

$$z_1 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad z_2=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Solução. Temos que,

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\right.\\
&\qquad\left.+i\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Para simplificar essa expressão relembre as fórmulas para o seno e o cosseno da soma de dois arcos (veja o Módulo *Trigonometria II*, do segundo ano do Ensino Médio):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Fazendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{2}$$

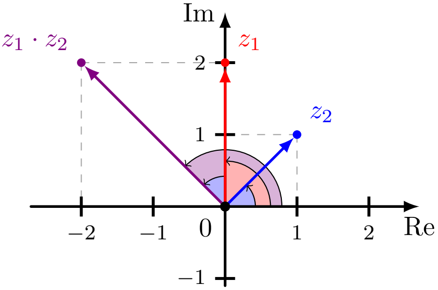
Logo,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

Vejamos onde se encontram os complexos z_1, z_2 e $z_1 \cdot z_2$ no plano de Argand-Gauss.

O complexo z_1 possui módulo 2, logo, está a distância 2 do ponto $(0,0)$. Além disso, seu argumento é $\frac{\pi}{2}$, que corresponde a um ângulo trigonométrico de 90 graus. Assim, o vetor de $(0,0)$ até o afixo de z_1 forma um ângulo de 90 graus com o eixo real (horizontal), medido no sentido anti-horário. Isso quer dizer que este vetor é vertical e com direção para cima, de sorte que z_1 está sobre o eixo imaginário, no ponto $(0,2)$.

O complexo z_2 possui módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\frac{\pi}{4}$, que corresponde a um ângulo trigonométrico de 45 graus. Assim, ele está no primeiro quadrante, sobre a reta o divide ao meio (ou seja, a bissetriz do primeiro quadrante). Mais precisamente, veja que o afixo de z_2 é o ponto $(1,1)$, o qual é um dos vértices do quadrado de lado 1 indicado na figura, ao passo que o vetor z_2 é uma diagonal deste quadrado, que tem comprimento $\sqrt{2}$.



Por fim, note que o produto $z_1 z_2$ possui módulo $2\sqrt{2}$ (que é o produto dos módulos de z_1 e z_2) e argumento $\frac{3\pi}{4}$, que é a *soma* dos argumentos de z_1 e z_2.

No próximo exemplo, mostramos que essas propriedades são sempre válidas. $\square$

Exemplo 2. *De modo geral, se $z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ são dois complexos escritos em forma polar, então*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

Em palavras, o módulo de $z_1 z_2$ é obtido multiplicando *os módulos de z_1 e z_2, ao passo que o argumento de $z_1 z_2$ é obtido* somando *os argumentos de z_1 e z_2.*

Por hora, deixamos a demonstração desse fato como exercício para você; nesse sentido, sugerimos imitar a demonstração do exemplo anterior. Na aula seguinte, exibiremos todos os detalhes.

Exemplo 3. *Aplicando o resultado do exemplo anterior várias vezes, obtemos uma expressão para o produto de n números complexos. Mais precisamente, dados*

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1 \operatorname{cis}\theta_1, \\ z_2 &= r_2 \operatorname{cis}\theta_2, \\ \vdots\ &\quad\ \vdots \qquad \vdots \\ z_n &= r_n \operatorname{cis}\theta_n, \end{aligned}$$

temos que

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n).$$

Solução. Uma vez que estamos admitindo a validade do resultado para $n = 2$, vejamos como demonstrá-lo para $n = 3$.

Dados $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$, $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$ e $z_3 = r_3 \operatorname{cis}\theta_3$, queremos calcular o produto $z_1 z_2 z_3$. Aplicando o caso $n = 2$ duas vezes, temos que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \\ &= (r_1 \operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis}\theta_2) \cdot z_3 \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \cdot r_3 \operatorname{cis}\theta_3 \\ &= r_1 r_2 r_3 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \operatorname{cis}(\theta_3) \\ &= r_1 r_2 r_3 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \end{aligned}$$

(Note que, nos cálculos acima, usamos o produto de dois complexos uma primeira vez para calcular $z_1 \cdot z_2$, e uma segunda vez para calcular $\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \operatorname{cis}(\theta_3)$.)

Para $n = 4$, temos um novo complexo $z_4 = r_4 \operatorname{cis}\theta_4$. Partindo do resultado acima, podemos calcular:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 z_4 &= (z_1 z_2 z_3) \cdot z_4 \\ &= r_1 r_2 r_3 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \cdot r_4 \operatorname{cis}(\theta_4) \\ &= r_1 r_2 r_3 r_4 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \operatorname{cis}(\theta_4) \\ &= r_1 r_2 r_3 r_4 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4), \end{aligned}$$

onde, no último passo, novamente usamos a fórmula para o produto de dois complexos em forma polar.

Continuando esse processo acrescentando um complexo por vez, chegamos à formula do enunciado. □

Observação 4. *O argumento acima pode ser transformado em uma demonstração formal se utilizarmos o Princípio da Indução Finita.*

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.