Material Teórico - Funções Trigonométricas

Seno, Cosseno e Tangente - Parte I

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de abril de 2019

Portal OBMEP

1 Funções periódicas

Antes de introduzir as funções trigonométricas, vamos revisar o conceito de “função periódica”, uma vez que as funções trigonométricas são desse tipo.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com domínio e contradomínio no conjunto dos números reais. Quando tal função não é constante e existe um menor número real positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, dizemos que f é periódica de *período* p. Isso quer dizer que p é o comprimento do menor intervalo após o qual $f(x)$ passa a se repetir. Veja que não basta a equação $f(x+p) = f(x)$ ser satisfeita para alguns valores de x. É necessário que ela seja satisfeita para *todo* x; além disso, p deve ser o menor real positivo tal que ela seja satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$.

A Figura 1 traz um exemplo de função periódica em que o período é igual a 6.

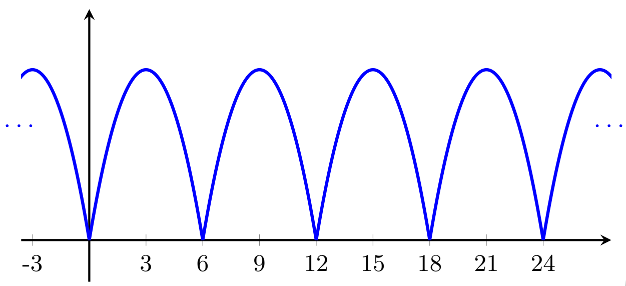
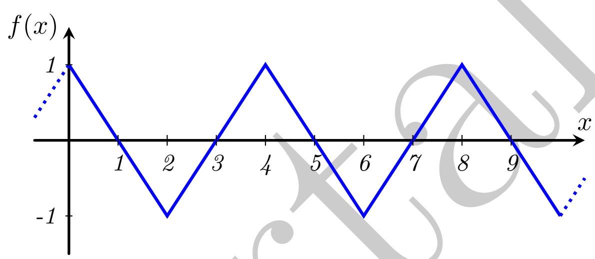


Figura 1: exemplo de uma função periódica.

Exemplo 1. *A função esboçada no gráfico abaixo é periódica. Encontre seu período e calcule o valor de* $f(30)$.

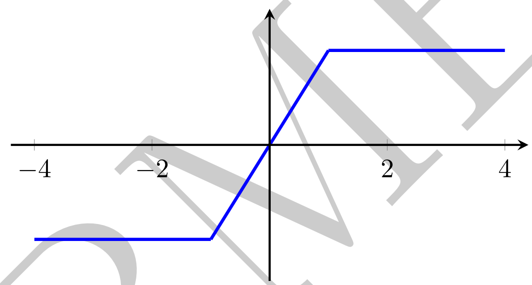


Solução. Observe que o desenho em formato de “V” realizado pelo gráfico ao variarmos x de 0 a 4 se repete indefinidamente. Assim, observamos que para qualquer valor de x temos $f(x+4) = f(x)$. Por exemplo, $f(4) = f(0) = 1$; $f(5) = f(1) = 0$; $f(6) = f(2) = -1$; $f(7) = f(3) = 0$; $f(8) = f(4) = 1$, etc. Isso também vale para números não inteiros, como $f(4{,}5) = f(0{,}5) = 0{,}5$. Também, não é difícil verificar que $p = 4$ é o menor número positivo que satisfaz $f(x+p) = f(x)$ *para todo* x. Logo o período de f é 4. Por exemplo, apesar de que $f(7) = f(5) = f(3) = f(1) = 0$, não poderíamos dizer que o período é 2, pois $f(6) \neq f(4)$.

Para calcular $f(30)$, veja que $f(30) = f(26)$, já que $30 = 26 + 4$. Da mesma forma, $f(26) = f(22)$, pois $26 = 22 + 4$. Por sua vez, $f(22) = f(18)$. Continuando a subtrair 4, obtemos $f(30) = f(30 - 4k)$ para todo k inteiro. Em particular, fazendo $k = 7$ (que é o quociente da divisão de 30 por 4), temos que $f(30) = f(2)$. Como $f(2) = -1$, temos que $f(30) = -1$. □

De modo geral, quando f é periódica de período p, se conhecermos os valores de $f(x)$ para todo x em algum intervalo de comprimento p, poderemos calcular o valor de $f(x)$ para todo x real.

A seguir, damos um exemplo de função **não periódica**.



2 Notação

Lembre-se, dos módulos anteriores, que para qualquer real x o valor de $\operatorname{sen}(x)$ pode ser obtido utilizando-se o círculo trigonométrico, o círculo de raio 1 e centro em $O = (0,0)$. Partindo do ponto $A = (1,0)$, percorremos um arco de comprimento $|x|$ (ou seja, cujo ângulo central mede x radianos) sobre esse círculo, no sentido anti-horário caso $x > 0$ e no sentido horário caso $x < 0$, até chegarmos a um ponto P. Conforme estudamos anteriormente, o deslocamento vertical de P em relação ao eixo-x é o valor de $\operatorname{sen}(x)$ (com sinal negativo, se P estiver abaixo do eixo-x). Assim, se P possui coordenadas $P = (x_p, y_p)$, temos que esse deslocamento é igual a y_p, que é chamada de ordenada de P (veja a próxima figura).

De forma análoga e com a mesma notação acima, $\cos(x)$ é o valor da abscissa de P, ou seja, é igual x_p, e corresponde ao deslocamento horizontal de P em relação ao eixo-y.

Com isso podemos calcular os valores de $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ para qualquer valor real de x, inclusive para valores negativos ou maiores do que 2π. Quando $|x| > 2\pi$, daremos várias voltas no círculo trigonométrico para encontrar P.

3 A função seno

A função seno é a função que associa a cada número real x o valor do seno do arco que mede x radianos, denotado por $\operatorname{sen}(x)$. Assim, seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Exemplo 2. *Calcule* $\operatorname{sen}(0)$*,* $\operatorname{sen}(\pi/2)$*,* $\operatorname{sen}(\pi)$*,* $\operatorname{sen}(3\pi/2)$ *e* $\operatorname{sen}(2\pi)$.

Portal OBMEP

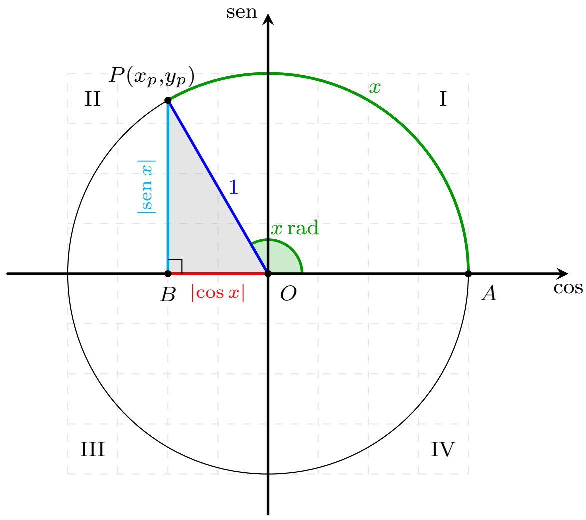


Figura 2: seno e cosseno no círculo trigonométrico.

Solução. Considere o ponto $A = (1, 0)$, um número real x e o ponto P sobre o círculo trigonométrico tal que $x = \ell(\widehat{AP})$, sendo o arco $\widehat{AP}$ medido no sentido anti-horário. Quando $x = 0$, o ponto P coincide com A (o arco percorrido tem comprimento zero, logo, não saímos do ponto A). Quando $x = 2\pi$, damos um volta completa no círculo trigonométrico, de modo que P também coincide com A. Assim, $P = (1, 0)$ e, lembrando que a ordenada representa o seno, temos:

$$\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0.$$

Por sua vez, como um círculo de raio 1 possui comprimento 2π, , quando $x = \pi/2$ teremos percorrido 1/4 dele até chegar ao ponto P. Dessa forma, teremos parado no ponto $P = (0, 1)$, de sorte que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. De maneira análoga, quando $x = \pi$, estaremos no ponto $P = (-1, 0)$, logo $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. Por fim, quando $x = 3\pi/2$, estaremos no ponto $P = (0, -1)$, de modo que $\operatorname{sen}(3\pi/2) = -1$. Em resumo, temos a seguinte tabela:

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{sen}(x)$	0	1	0	-1	0

□

Veja que, para qualquer valor de x, como o ponto P (definido na Seção 2) permanece sobre o círculo trigonométrico, sua distância ao eixo-x é sempre no máximo 1. Mais precisamente, P se desloca de no máximo 1 unidade para cima e no máximo uma unidade para baixo do eixo-x. Dessa forma, temos que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1,$$

para todo x. Usando essa interpretação de que $\operatorname{sen} x$ mede o deslocamento do ponto P para cima ou para baixo e observando P percorrer o círculo trigonométrico, temos que, quando x varia de 0 a $\pi/2$, o valor $\operatorname{sen} x$ aumenta; de $\pi/2$ a $3\pi/2$ o valor de $\operatorname{sen} x$ diminui, e de $3\pi/2$ a 2π o valor de $\operatorname{sen} x$ aumenta. Assim, para $0 \leq x \leq 2\pi$, os pontos $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ são os únicos nos quais $\operatorname{sen}(x)$ atinge seus valores máximo e mínimo, respectivamente.

Para desenhar o gráfico da função seno, devemos marcar em um plano pontos (x, y) tais que $y = \operatorname{sen}(x)$. Vamos começar observando apenas os valores de x entre 0 e 2π. Além dos valores da tabela acima, podemos utilizar os valores do seno dos arcos $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$. Estes são os arcos equivalentes a 30°, 45° e 60°, de sorte que os valores do seno, cosseno e tangente dos mesmos foram calculados no Módulo "*Triângulo Retângulo, Lei dos Senos e Cossenos, Polígonos Regulares*" do nono ano do EF. Assim, obtemos a tabela abaixo.

Ângulo (graus)	**Ângulo (radianos)**	**sen**	**cos**	**tg**
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Como vimos na Aula 1 deste módulo, também podemos calcular o seno dos arcos cuja redução ao primeiro quadrante resulta em um dos arcos da tabela acima. A Figura 3 mostra os pontos que obtemos dessa forma. Note que ela é coerente com nossas observações sobre os intervalos em que $\operatorname{sen} x$ cresce ou decresce. Basta, então, ligar esses pontos para obter uma boa aproximação do gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$.

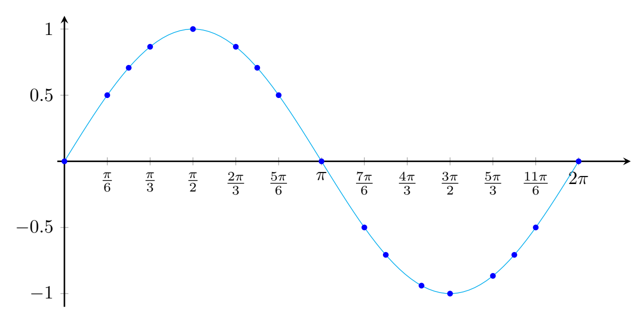


Figura 3: alguns pontos (x, y) tais que $y = \operatorname{sen} x$.

A Figura 4 nos mostra ainda outras possíveis escolhas para o ponto P e detalha como o deslocamento de P sobre o círculo trigonométrico é usado para construir o gráfico da função seno: do lado esquerdo temos uma cópia do círculo trigonométrico com alguns pontos marcados; do lado direito temos o gráfico desejado.

Portal OBMEP

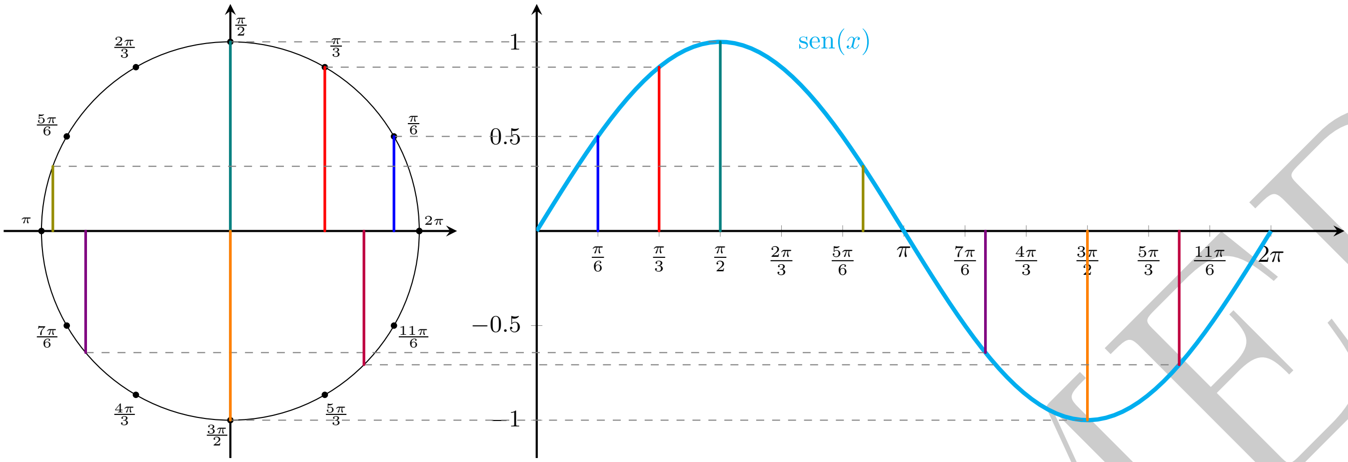


Figura 4: gráfico da função $\operatorname{sen}(x)$ quando x varia de 0 a 2π, com alguns pontos marcados e seus correspondentes no círculo trigonométrico.

Para obter o gráfico, veja que cada ponto sobre o eixo horizontal do gráfico representa a medida de um arco (em radianos) e altura de cada ponto do gráfico corresponde ao seno do arco, que é "copiado" da altura do ponto P. Sobre isso, veja também a animação no endereço https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif.

Por fim, para estender o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ fazendo x variar sobre todos os número reais, lembremos que quando z e x são arcos congruentes, ou seja, $z - x = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, eles determinam um mesmo ponto P sobre o círculo trigonométrico. Em particular, temos que, para todo x real,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x.$$

Além disso, observando o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ entre 0 e 2π, vemos que para qualquer p com $0 < p < 2\pi$, existe algum x tal que $\operatorname{sen}(x + p) \neq \operatorname{sen}(x)$. Com isso, temos que a função seno é periódica, de período 2π. Assim, o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ é obtido fazendo várias cópias do gráfico da Figura 3. O resultado é exibido na Figura 5.

Neste texto, sempre que omitirmos unidades, é porque estaremos usando radianos. Em particular, os números nos eixo-x das Figuras 3, 4 e 5 representam medidas em radianos. Por exemplo, na Figura 5 fazemos x variar de -10 a 10 e, ao escrever $\operatorname{sen}(10)$ estamos nos referindo ao seno de 10 radianos e *não* $10°$. Assim, tenha cuidado, caso você venha a usar calculadoras para conferir os valores do gráfico. O exemplo a seguir elabora um pouco mais a esse respeito.

Exemplo 3. *Boa parte das calculadoras científicas trabalham com radianos por padrão, mas isso nem sempre é o caso. Assim, se digitarmos* 10 *numa calculadora e teclarmos "SEN", é possível que o resultado obtido seja o seno de* $10°$ *(dez graus) ou* $10\,\mathrm{rad}$ *(dez radianos). É provável que a calculadora tenha uma tecla para definir o* modo de operação, *"RAD" ou "DEG", então é necessário ficar atento. Suponha que a calculadora está no modo "RAD". O que representa o valor obtido?*

Vamos calcular, a menor determinação positiva de 10 *radianos. Dividindo* 10 *por* 2π *obtemos, aproximadamente,* 1,591. *Assim, o arco entre* 0 *e* 2π *congruente a* 10 *tem comprimento* $10 - 2\pi$, *ou aproximadamente* 3,716. *Isso é um pouco maior do que* π, *logo, está no quadrante III. Temos então que* $\operatorname{sen}(3{,}716) = -\operatorname{sen}(3{,}716 - \pi) \cong -\operatorname{sen}(0{,}575)$. *Fazendo esse experimento, na calculadora, obtemos*

$$\operatorname{sen}(10) = \operatorname{sen}(10 - 2\pi) = -\operatorname{sen}(10 - 3\pi) \cong -0{,}544.$$

Isso é coerente com o ponto exibido no gráfico da Figura 5

4 A função cosseno

Nas vídeo-aulas desse módulo, a função cosseno é abordada da mesma forma que a função seno, ou seja, repetindo o procedimento da seção anterior: calculando alguns de seus pontos e desenhando uma curva que passa por eles.

Como explicamos anteriormente, para a função cosseno, devemos observar a abscissa do ponto P quando este percorre o círculo trigonométrico partindo do ponto $A = (1, 0)$. Usando essa interpretação, veja que $\cos(0) = 1$ e que o valor de $\cos(x)$ diminui quando x varia de 0 até π, chegando a $\cos(\pi) = -1$, e depois aumenta quando x varia de π a 2π.

Neste texto, seguimos uma rota alternativa e, para desenhar o gráfico da função cosseno, usamos a relação:

$$\cos(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \tag{1}$$

Como podemos perceber isso? Considerando um triângulo retângulo qualquer, se um de seus ângulos não retos

Portal OBMEP

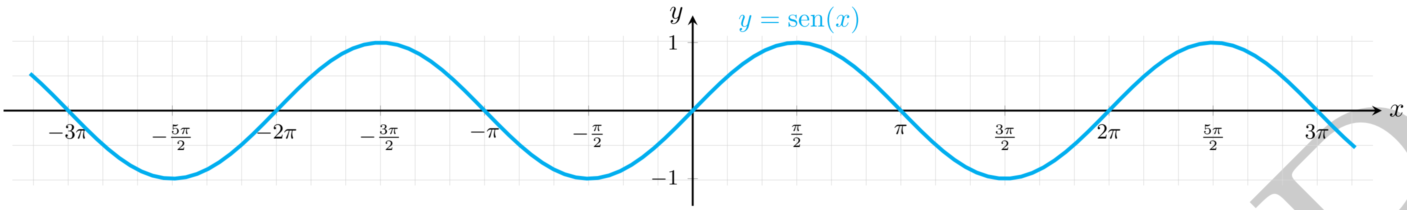


Figura 5: gráfico de seno de -10 a 10.

tiver medida x, o outro terá medida $\frac{\pi}{2} - x$. Como o cateto adjacente a α é o cateto oposto a $\frac{\pi}{2} - x$, temos que $\cos x = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Apesar de a argumentação acima só funcionar para $0 < \alpha < \pi/2$, é possível provar que a equação (1) também é valida para qualquer x real. Deixamos como exercício analisar o que acontece quando x pertence a cada um dos outros quadrantes, usando reduções de x ao primeiro quadrante.

Agora, para todo arco α, vale que

$$\mathrm{sen}(-\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha) \quad \text{e} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha). \tag{2}$$

Realmente, suponha que, partindo de (1,0) e percorrendo um arco de medida α, paramos no ponto $P = (x,y)$, de forma que $\mathrm{sen}(\alpha) = y$ e $\cos(\alpha) = x$. Perceba que percorrer o arco $-\alpha$ significa percorrer α no sentido oposto. Ao fazermos isso, pararemos no ponto P', simétrico de P em relação ao eixo-x. Logo, $P' = (x, -y)$, e temos que $\cos(-\alpha) = x = \cos(\alpha)$ e $\mathrm{sen}(-\alpha) = -y = -\mathrm{sen}(\alpha)$.

De posse das relações (1) e (2), temos que

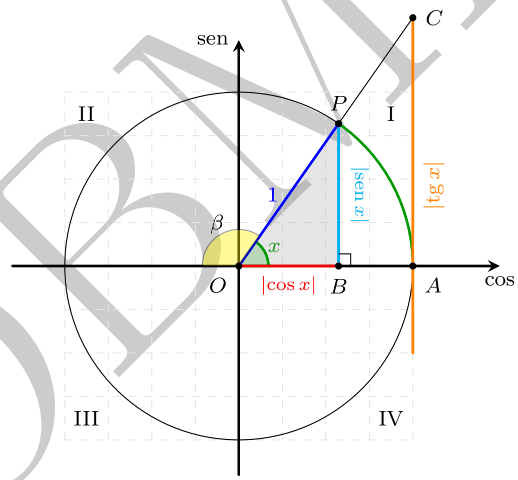
$$\cos(x) = \cos(-x) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto, o gráfico da função $\cos(x)$ nada mais é do que a translação do gráfico da função $\mathrm{sen}(x)$ de $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda (veja os módulos sobre funções), e é dessa forma que a curva vermelha da Figura 6 pode ser obtida a partir da curva azul da Figura 5.

5 A função tangente

Como já sabemos, a tangente de um arco x pode ser definida como a razão entre o seno e o cosseno deste arco, desde que o cosseno seja diferente de zero. Também é possível visualizar a tangente usando o círculo trigonométrico.

Como antes, considere $A = (1, 0)$ e seja P um ponto qualquer sobre o círculo trigonométrico; seja agora B o pé da perpendicular traçada de P ao eixo-x. Agora, tracemos a reta perpendicular ao eixo-x passado pelo ponto A (veja que, como essa reta é perpendicular ao raio OA, ela é tangente ao círculo trigonométrico), e chamemos de C o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{PO}$ com tal reta. Veja que a abscissa do ponto C é igual a 1; vamos mostrar que sua ordenada é igual a $\mathrm{tg}(x)$. Primeiramente, mostremos que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ é igual ao valor absoluto de tangente de x, ou seja, $\overline{AC} = |\mathrm{tg}(x)|$.



Na figura acima, consideramos o caso em que x está no primeiro quadrante, mas não é difícil verificar que um argumento similar vale para os demais quadrantes. Veja que os triângulos AOC e BOP são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos e possuem o ângulo x em comum. Então, temos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BO}}.$$

Substituindo $\overline{AO} = 1$, $\overline{BP} = |\mathrm{sen}\, x|$ e $\overline{BO} = |\cos x|$ na igualdade acima, temos que

$$\overline{AC} = \frac{|\mathrm{sen}\, x|}{|\cos x|} = \left|\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\right| = |\mathrm{tg}\, x|.$$

Continuando, observe que, quando o ponto C está acima do ponto A é porque P está no quadrante I ou III; neste caso, temos que $\mathrm{tg}(x)$ é positiva, pois $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ possuem o mesmo sinal. Da mesma forma, quando C está abaixo de A, temos $\mathrm{tg}(x)$ é negativa, pois P está no quadrante II ou IV. Por conta disso, chamaremos a reta que contém o segmento AC de eixo das tangentes. Note que, quando $x = \pi/2$, o valor de $\mathrm{tg}(x)$ não está definido. Isso segue tanto porque a reta que passa por (0,0) e (0,1) (este último ponto correspondendo a P quando

Portal OBMEP

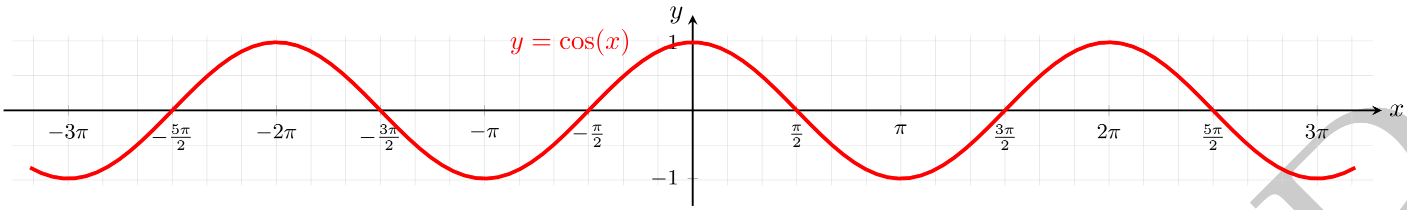


Figura 6: gráfico de cosseno de -10 a 10.

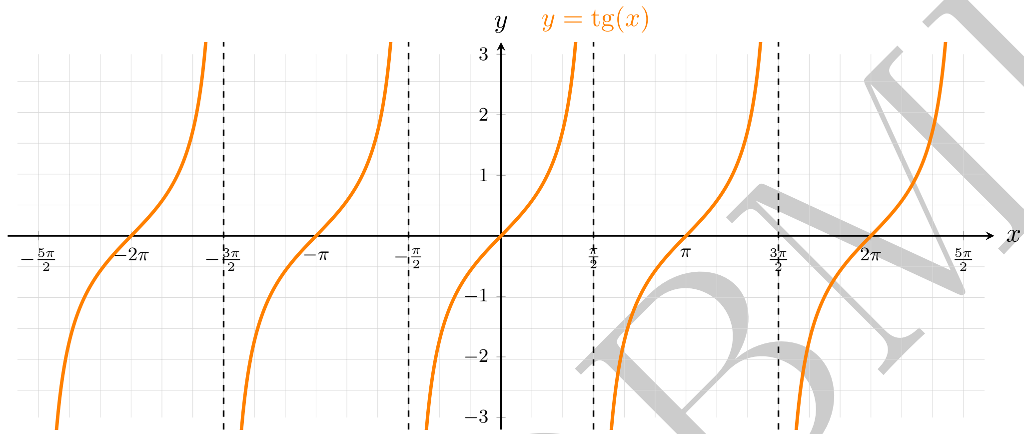


Figura 7: gráfico da tangente no intervalo de $-5\pi/2$ a $5\pi/2$.

$x = \pi/2$) não intersecta o eixo das tangentes, quanto porque $\mathrm{tg}(x) = \mathrm{sen}(x)/\cos(x)$ se $\cos(x) \neq 0$, mas $\cos(\pi/2) = 0$ (logo, não podemos realizar uma divisão por zero).

De forma geral, sempre que $\cos(x) = 0$ o valor de $\mathrm{tg}(x)$ não está definido. Isso acontece precisamente quando $x = \pi/2 + k\pi$ onde k é um número inteiro: quando k é par temos um arco congruente a $\pi/2$ e quando k é ímpar temos um arco congruente a $3\pi/2$.

De posse dos comentários acima e de modo análogo às seções anteriores, para construir o gráfico da tangente o que precisamos observar é o deslocamento do ponto C em relação ao eixo-x, à medida que P se move sobre o círculo trigonométrico.

Aqui, é mais conveniente começar com x sendo um número negativo um pouco maior que $-\pi/2$ (veja que quando $x = -\pi/2$ o valor de $\mathrm{tg}(x)$ não está definido). Neste caso, o ponto C estará muito abaixo de A, de modo que $\mathrm{tg}(x)$ será um número negativo de grande valor absoluto. À medida que x aumenta de $-\pi/2$ até $\pi/2$, o valor de $\mathrm{tg}(x)$ só aumenta, passado por 0 quando $x = 0$ e crescendo indefinidamente quando x se aproxima de $\pi/2$. Mais ainda, observe que, quanto mais próximo x estiver de $-\pi/2$ ou de $\pi/2$, mais rapidamente C se movimentará. Além disso, ao contrário das funções seno e cosseno, o valor de $\mathrm{tg}(x)$ não é limitado a um máximo (nem a um mínimo). Então, quando $x = \pi/2$ o valor de $\mathrm{tg}(x)$ não está definido. Repentinamente, para x um pouco maior que $\pi/2$, o valor de $\mathrm{tg}(x)$ volta a ser negativo e grande em módulo e o processo se repete, sempre em intervalos de comprimento π.

Com as observações acima, podemos construir o gráfico da função $\mathrm{tg}(x)$ (veja a Figura 7).

A conclusão é que a função $\mathrm{tg}(x)$ possui período π (em contraste com as funções seno e cosseno, que possuem período 2π).

Dicas para o Professor

Nesta aula, passamos a interpretar sen e como cos como funções que possuem como domínios o conjunto de todos os números reais, no lugar de apenas arcos entre 0 e $\pi/2$. O material aqui reunido pode ser apresentado em dois encontros de 50 minutos, desde que os alunos tenham boa familiaridade com o conceito de função e com o círculo trigonométrico. Caso contrário, recomendamos uma revisão dos módulos correspondentes.

A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

Portal OBMEP

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.

Portal OBMEP