Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Regra da Cadeia

Regra da Cadeia - Exercícios - Parte IV

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

24 de Maio de 2025

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Concluímos, aqui, a discussão de exercícios relacionados à regra da cadeia, discutindo mais alguns exemplos.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável, não identicamente nula e tal que*

$$f(x)f(y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \tag{1}$$

para quaisquer números reais x, y.

a) Mostre que f *é uma função par e que* $f(0) = 1$.

b) Prove que existe uma constante k *tal que* $f'(x) = 2kxf(x)$ *e resolva a equação funcional* (1) *nas condições dadas.*

Solução. Como f não é identicamente nula, vale $f(y_0) \neq 0$ para algum y_0 real. Além disso, por continuidade, podemos supor $y_0 \neq 0$ (isso será útil no item b)). Logo,

$$\begin{aligned} f(x)f(y_0) &= f\left(\sqrt{x^2 + y_0^2}\right) \\ &= f\left(\sqrt{(-x)^2 + y_0^2}\right) \\ &= f(-x)f(y_0) \end{aligned}$$

implica $f(x) = f(-x)$ para todo x real. Assim, f é par e, portanto,

$$f(0)f(y_0) = f\left(\sqrt{0^2 + y_0^2}\right) = f(|y_0|) = f(y_0),$$

de sorte que $f(0) = 1$.

Para estabelecer o item b), começamos observando que f é positiva. Com efeito, pondo $x/\sqrt{2}$ no lugar de x e y na equação (1), vem que

$$f(x) = f\left(\sqrt{(x/\sqrt{2})^2 + (x/\sqrt{2})^2}\right) = f\left(x/\sqrt{2}\right)^2 \geq 0.$$

Assim, basta mostrar que f nunca se anula para concluir sua positividade.

Da relação $f(x) = f\left(x/\sqrt{2}\right)^2$, obtida acima, com $x/\sqrt{2}$ no lugar de x, segue que $f\left(x/\sqrt{2}\right) = f(x/2)^2$ e, consequentemente, $f(x) = f(x/2)^4$ para todo x.

Se $f(x_0)$ fosse nulo para algum real x_0, valeria $f(x_0/2)^4 = f(x_0) = 0$, de sorte que $f(x_0/2) = 0$. Argumentando por indução, é fácil provar que $f(x_0/2^n) = 0$ para todo n natural. Então, fazendo $n \to +\infty$, teríamos $f(0) = 0$, contradizendo $f(0) = 1$. Portanto, f é positiva.

Supondo $y \neq 0$, derivamos a relação (1) em relação a x com auxílio da regra da cadeia, obtendo

$$f'(x)f(y) = \frac{xf'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2}$$

A igualdade (2) pode ser reescrita na forma

$$\frac{f'(x)f(y)}{x} = \frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

para quaisquer $x, y \neq 0$ ou, invertendo os papéis de x e y,

$$\frac{f'(y)f(x)}{y} = \frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

desde que x, y sejam não nulos.

Segue das últimas duas igualdades que

$$\frac{f'(x)f(y)}{x} = \frac{f'(y)f(x)}{y},$$

ou seja,

$$f'(x)yf(y) = f'(y)xf(x),$$

relação válida mesmo se algum dos números x ou y for nulo, pois $f'(0) = 0$. (Por que? [1])

[1] Basta fazer $x = 0$ em (2) ou notar que, sendo f uma função par, f' é ímpar.

Fazendo $y = y_0$ na equação funcional anterior e lembrando que $y_0, f(y_0)$ são diferentes de 0, chegamos a

$$f'(x) = \frac{f'(y_0)}{y_0 f(y_0)} \cdot x f(x) = 2kx f(x),$$

para $k = f'(y_0)/(2y_0 f(y_0))$.

Dessa forma, a igualdade

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} = 2kx = \frac{d(kx^2)}{dx}$$

permite escrever $\ln f(x) = kx^2 + l$ para todo x e uma certa constante l. Avaliando essa relação em $x = 0$, obtemos $l = \ln f(0) - k \cdot 0^2 = 0$, implicando $\ln f(x) = kx^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pondo $a = e^k$, segue que

$$f(x) = e^{kx^2} = (e^k)^{x^2} = a^{x^2}$$

para todo x real.

Desse modo, concluímos que o conjunto-solução da equação (1) consiste das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = a^{x^2}$, em que a é um número real positivo. $\square$

Exemplo 2 (Putnam, 2005). *Determine todas as funções diferenciáveis $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ para as quais existe um número real positivo a tal que*

$$f'\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{f(x)}, \tag{3}$$

para todo $x > 0$.

Solução. Trocando x por a/x na equação funcional (3), vem que

$$f'(x) = \frac{a}{x f(a/x)},$$

ou seja,

$$\frac{1}{f(a/x)} = \frac{x f'(x)}{a}. \tag{4}$$

Multiplicando membro a membro a relação (3) pela igualdade anterior, obtemos

$$\frac{f'(a/x)}{f(a/x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \frac{x^2}{a}.$$

Pondo $g := \ln \circ f$, segue que $g' = f'/f$, o que permite reescrever a relação acima na forma

$$g'(a/x) = x^2 g'(x)/a$$

ou, ainda,

$$g'(x) - \frac{ag'(x/a)}{x^2} = 0.$$

Pela regra da cadeia, observamos que o primeiro membro da igualdade anterior é a derivada da função $x \mapsto g(x) + g(a/x)$, de onde segue que tal função é constante, digamos $g(x) + g(a/x) = K$, para todo $x > 0$ e um certo $K \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\begin{aligned}\ln(f(x) \cdot f(a/x)) &= \ln f(x) + \ln f(a/x)\\ &= g(x) + g(a/x) = K,\end{aligned}$$

isto é,

$$f(x)f(a/x) = L := e^K, \quad \forall\, x > 0.$$

Substituindo $1/f(a/x) = f(x)/L$ na relação (4), chegamos a

$$\frac{f(x)}{L} = \frac{xf'(x)}{a},$$

logo,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a/L}{x}.$$

Note que, na última igualdade, o 2º membro é a derivada em x da função $(a/L) \cdot \ln$. Portanto, existe uma constante M tal que $g(x) = (a/L) \ln x + M$ para todo $x > 0$.

Escrevendo $M = \ln N$, para algum real positivo N, vem que

$$\ln f(x) = g(x) = \ln x^{a/L} + \ln N = \ln(Nx^{a/L}),$$

de onde se conclui que $f(x) = Nx^{a/L}$ para todo $x > 0$. Derivando, obtemos $f'(x) = (Na/L)x^{(a/L)-1}$, de modo que $xf'(x)f(a/x) = a$ implica

$$\cancel{a}(N^2/L)a^{a/L} = \cancel{a} \ \therefore \ N = \sqrt{La^{-a/L}}.$$

Indicando a razão a/L por b, concluímos que as soluções da equação funcional dada são as funções da forma

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{b}}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^b,$$

em que a e b são números reais positivos quaisquer. □

Exemplo 3. *Determine todos os polinômios com coeficientes inteiros f, g tais que*

$$f(g(x)) = x^{2025} + 2x + 1.$$

Solução. Pela regra da cadeia, temos

$$f'(g(x))g'(x) = 2025x^{2024} + 2. \tag{5}$$

`Afirmação`. f' ou g' é um polinômio constante.

Caso contrário, $f'(g(x))$ e $g'(x)$ seriam polinômios de graus maiores que 0, digamos

$$f'(g(x)) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i \quad \text{e} \quad g'(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j,$$

com $r, s \geq 1$.

Comparando coeficientes em (5), obteríamos $a_0b_0 = 2$, de modo que $a_0 = \pm 2$, $b_0 = \pm 1$ ou $a_0 = \pm 1$, $b_0 = \pm 2$. Supondo, sem perda de generalidade, $a_0 = \pm 2$, cada a_i deveria ser par. Realmente, se algum dos inteiros $a_1, \ldots, a_r$ fosse ímpar, poderíamos tomar o primeiro deles com essa propriedade, digamos a_m, em que $1 \leq m \leq r$. Daí, observando que o termo de grau m em $2025x^{2024} + 2$ é nulo, chegaríamos a

$$a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_{m-1}b_1 = -a_mb_0 = \mp a_m,$$

uma igualdade impossível, haja vista que o primeiro membro é par (pois $a_0, \dots, a_{m-1}$ são pares), enquanto o segundo membro é ímpar.

Por outro lado, se todos os coeficientes do polinômio $f'(g(x))$ fossem pares, o mesmo se poderia afirmar dos coeficientes do polinômio produto

$$f'(g(x))g'(x) = 2025x^{2024} + 2,$$

o que é evidentemente falso.

Com a afirmação justificada, devemos ter $f(x) = ax + b$ ou $g(x) = ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Se $f(x) = ax + b$, então (5) dá $ag'(x) = 2025x^{2024} + 2$, de sorte que a é um divisor comum de 2025 e 2, ou seja, $a = \pm 1$. Logo, $f(x) = \pm x + b$ e, daí, $g(x) = \pm(x^{2025} + 2x + 1 - b)$.

Da mesma forma, se $g(x) = ax + b)$, então $a = \pm 1$, logo, $g(x) = \pm x + b$ e $f(x) = (\pm x \mp b)^{2025} + 2(\pm x \mp b) + 1$.

Portanto, as soluções são os pares

$$\begin{aligned}
&f(x) = x + b, \quad g(x) = x^{2025} + 2x + 1 - b,\\
&f(x) = -x + b, \quad g(x) = -(x^{2025} + 2x + 1 - b),\\
&f(x) = (x - b)^{2025} + 2(x - b) + 1, \quad g(x) = x + b,\\
&f(x) = (-x + b)^{2025} + 2(-x + b) + 1, \quad g(x) = -x + b,
\end{aligned}$$

em que b é um inteiro arbitrário. □

Exemplo 4. *Uma função f é dita de* Möbius *se sua regra tiver a forma*

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

para certos números reais a, b, c, d, com $ad - bc \neq 0$. Quando $c = 0$, f é uma função afim (não constante). Caso contrário, o domínio maximal de f é a reunião dos intervalos $(-\infty, -d/c) \cup (-d/c, +\infty)$.

Se f é uma função de Möbius, mostre que

$$2f' \cdot f''' - 3(f'')^2 \equiv 0. \tag{6}$$

Reciprocamente, se I for um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ for três vezes derivável, com derivada não nula em cada ponto, e $2f' \cdot f''' - 3(f'')^2 \equiv 0$, prove que f é uma função de Möbius.

Solução. Sendo f uma função de Möbius e x um ponto de seu domínio maximal, temos

$$f'(x) = \frac{a(cx+d) - (ax+b)c}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Daí, seguem facilmente as relações

$$f''(x) = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3} \quad \text{e} \quad f'''(x) = \frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2f'(x)f'''(x) &= \frac{12c^2(ad-bc)^2}{(cx+d)^6} \\ &= 3\left(\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}\right)^2 \\ &= 3f''(x)^2. \end{aligned}$$

Assim, f satisfaz (6).

Reciprocamente, seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função três vezes derivável, satisfazendo (6) e com derivada não nula em cada ponto de I. Pondo $g := 1/f'$, temos a

`Afirmação`: g é constante ou g uma função quadrática.

Admitindo essa afirmação como verdadeira, segue que f' é constante (e, daí, f é uma função afim não constante, logo, uma função de Möbius), ou vale

$$f'(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

para certas constantes reais a, b, c, com $a \neq 0$, e para todo $x \in I$. Nesse último caso, seguem das regras de derivação as igualdades

$$f''(x) = \frac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

e

$$f'''(x) = \frac{2(3a^2x^2 + 3abx - ac + b^2)}{(ax^2 + bx + c)^3}.$$

Portanto, a relação (6) implica

$$\frac{4(3a^2x^2 + 3abx - ac + b^2)}{(ax^2 + bx + c)^4} = \frac{3(2ax + b)^2}{(ax^2 + bx + c)^4},$$

de modo que

$$\begin{aligned} 4(3a^2x^2 + 3abx - ac + b^2) &= 3(2ax + b)^2 \\ &= 12a^2x^2 + 12abx + 3b^2 \end{aligned}$$

para todo $x \in I$. A conclusão é de que $b^2 - 4ac = 0$, ou seja,

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)^2/4a.$$

Dessa forma,

$$f'(x) = \frac{4a}{(2ax + b)^2} = \frac{d\left(-\frac{2}{2ax+b}\right)}{dx},$$

de onde segue a existência de uma constante k tal que $f(x) = k - 2/(2ax + b)$, ou seja,

$$f(x) = \frac{2akx + bk - 2}{2ax + b}, \quad \forall\, x \in I. \tag{7}$$

Sendo

$$2ak \cdot b - (bk - 2) \cdot 2a = 4a \neq 0,$$

a relação (7) mostra que f é uma função de Möbius.

Para encerrar a solução, precisamos demonstrar a afirmação acima. Como sabemos, g será uma função quadrática desde que tenhamos $g''' \equiv 0$ e $g'' \not\equiv 0$.

Observe que f é, na verdade, quatro vezes derivável, pois a relação $f''' = 3(f'')^2/2f'$ garante a diferenciabilidade de f'''. Logo, $g = 1/f'$ é três vezes derivável.

Com a relação (6) em mente, a identidade $g' = -\frac{f''}{(f')^2}$ implica

$$g'' = -\frac{f''' \cdot (f')^2 - 2(f'')^2 \cdot f'}{(f')^4} = -\frac{f''' \cdot f' - 2(f'')^2}{(f')^3}$$
$$= -\frac{\frac{3(f'')^2}{2} - 2(f'')^2}{(f')^3} = \frac{(f'')^2}{2(f')^3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g''' &= \frac{4f''' \cdot f'' \cdot (f')^3 - 6(f'')^3 \cdot (f')^2}{4(f')^6} \\ &= \frac{2f''' \cdot f'' \cdot f' - 3(f'')^3}{2(f')^4} \\ &= (2f''' \cdot f' - 3(f'')^2) \cdot \frac{f''}{2(f')^2} \\ &= 0 \cdot \frac{f''}{2(f')^2} = 0. \end{aligned}$$

Agora, basta notar que, se g não for constante, $f' = 1/g$ também não será, de sorte que $f'' \not\equiv 0$; pelo cálculo de g'' realizado acima, vemos que $g'' \not\equiv 0$. $\square$

Exemplo 5. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for três vezes derivável, com derivada não nula em cada ponto, a* derivada schwarziana *de f em $x \in I$, $\mathcal{D}f(x)$, é definida como*

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2. \tag{8}$$

Pelo exemplo anterior, f é uma função de Möbius se, e somente se, $\mathcal{D}f \equiv 0$.

Prove, nas hipóteses adequadas, a seguinte regra da cadeia para a derivada Schwarziana:

$$\mathcal{D}(f \circ g) = (\mathcal{D}f \circ g) \cdot (g')^2 + \mathcal{D}g. \tag{9}$$

Em particular, a composição de funções de Möbius e a inversa de uma função de Möbius também são funções de Möbius [2].

[2] Esses fatos também podem ser verificados diretamente.

Solução. Para organizar os cálculos, a seguinte definição será conveniente. Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função nas hipóteses do exemplo, seja $h_f : I \to \mathbb{R}$ definida como

$$h_f = (\ln|f'|)' = \frac{f''}{f'}.$$

Afirmamos que $\mathcal{D}f = h_f' - \frac{h_f^2}{2}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} h_f' - \frac{h_f^2}{2} &= \frac{f''' \cdot f' - (f'')^2}{(f')^2} - \frac{(f'')^2}{2(f')^2} \\ &= \frac{f'''}{f'} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \\ &= \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \mathcal{D}f. \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando a regra da cadeia,

$$\begin{aligned} h_{f\circ g} &= (\ln|(f\circ g)'|)' = (\ln|f'\circ g \cdot g'|)' \\ &= (\ln|f'|\circ g + \ln|g'|)' \\ &= \Big((\ln|f'|)'\circ g\Big)\cdot g' + (\ln|g'|)' \\ &= (h_f\circ g)\cdot g' + h_g. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f\circ g) &= h_{f\circ g}' - \frac{h_{f\circ g}^2}{2} \\ &= ((h_f\circ g)\cdot g' + h_g)' - \frac{((h_f\circ g)\cdot g' + h_g)^2}{2} \\ &= \big(h_f'\circ g\big)\cdot(g')^2 + (h_f\circ g)\cdot g'' + h_g' \\ &- \frac{((h_f\circ g)\cdot g' + h_g)^2}{2}. \end{aligned}$$

Expandindo o quadrado acima, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f\circ g) &= \left(h_f'\circ g - \frac{h_f^2\circ g}{2}\right)(g')^2 + \cancel{h_f\circ g\cdot g''}\\ &\quad - \cancel{h_f\circ g\cdot g''} + \left(h_g' - \frac{h_g^2}{2}\right)\\ &= \left(\left(h_f' - \frac{h_f^2}{2}\right)\circ g\right)\cdot (g')^2 + \mathcal{D}g\\ &= (\mathcal{D}f\circ g)\cdot (g')^2 + \mathcal{D}g.\end{aligned}$$

$\square$

Dicas para o Professor

A equação funcional (1) admite o mesmo conjunto-solução apresentado na resolução do exemplo 1 se supusermos apenas que f é *contínua*. Com efeito, os quatro primeiros parágrafos da solução do primeiro exemplo utilizam apenas a continuidade de f para mostrar que f é par, positiva e que $f(0) = 1$. Definindo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(\sqrt{x})$, se $x \geq 0$, e $g(x) = 1/g(-x)$ se $x < 0$, verifica-se facilmente que g é contínua, positiva e $g(x + y) = g(x)g(y)$ para quaisquer números reais x, y. Pelo exemplo 21 da aula *Continuidades Laterais e em um Intervalo*, do módulo *Funções Contínuas*, g é uma função exponencial, ou seja, existe $a > 0$ tal que $g(x) = a^x$ para todo x real. Sendo f uma função par, vem que $f(x) = f(\sqrt{x^2}) = g(x^2) = a^{x^2}$, como queríamos[3].

Ainda sobre a equação funcional (1), uma variação dela surge naturalmente em Estatística, ao moderlarmos o experimento (suposto aleatório) de lançamento de um dardo em um alvo circular. A esse respeito, veja o material teórico da aula "*A Curva Normal*" do módulo "*Introdução à Inferência*

[3]Observe que, pondo $x = y$ na equação funcional (1) e utilizando mais uma vez o fato de que f é par, obtemos a equação funcional do exemplo 10 da aula *Regra da Cadeia - Exercícios - Parte III*.

Estatística", do segundo ano do Ensino Médio e, para mais detalhes, o apêndice A do capítulo 1 da referência [3].

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

3. G. F. Simmons. *Differential Equations with Applications and Historical Notes.* 3ª ed. Boca Raton: Chapman & Hall, 2017.

4. M. Spivak. *Calculus.* 4ª ed. Houston: Publish or Perish, 2008.