Material Teórico - Módulo de UNIDADES DE MEDIDA DE COMPRIMENTO E DE ÁREAS

Áreas de Outras Figuras Básicas e Primeiros Exercícios

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

12 de Março de 2021

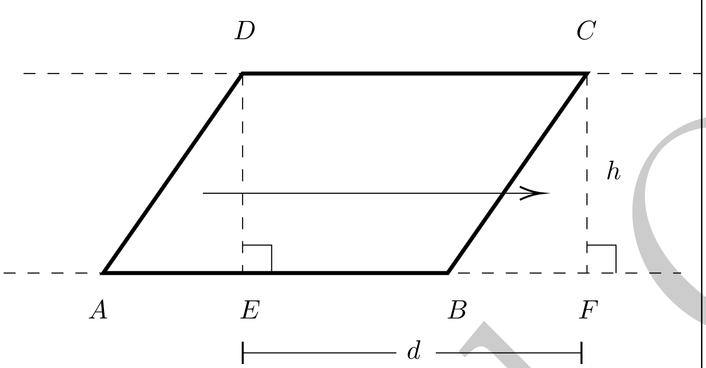
1 Introdução

Na aula anterior, aprendemos a calcular a área de retângulos e algumas figuras associadas a eles. A seguir, apresentamos fórmulas explícitas para o cálculo da área de outros tipos de figuras. Começamos estudando *paralelogramos.*

Definição 1. *Um* ***paralelogramo*** *é um quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos.*

Paralelogramos possuem diversas propriedades que podem ser demonstradas com o uso do conceito de *congruência de triângulos.* Como essa ferramenta não é, em geral, formalmente desenvolvida para alunos do sexto ano, utilizaremos essas propriedades de forma intuitiva.

Considere um paralelogramo $ABCD$. Sejam F e E as *projeções ortogonais*[1] dos pontos C e D, respectivamente, sobre a reta que contém o lado AB, conforme ilustrado na figura a seguir.



Como CD e AB são paralelos, temos $CF = DE$. A medida comum[2] dos segmentos CF e DE será denotada por h e é conhecida como a **altura** do paralelogramo $ABCD$ relativa ao lado AB. Nesse caso, AB também é chamado de **base** relativa à altura h.

Observe que $DEFC$ é um retângulo, logo, sua área é igual ao produto de suas dimensões. Como $AB = CD = d$, concluímos que a medida da área de $DEFC$ é igual a $d \times h$.

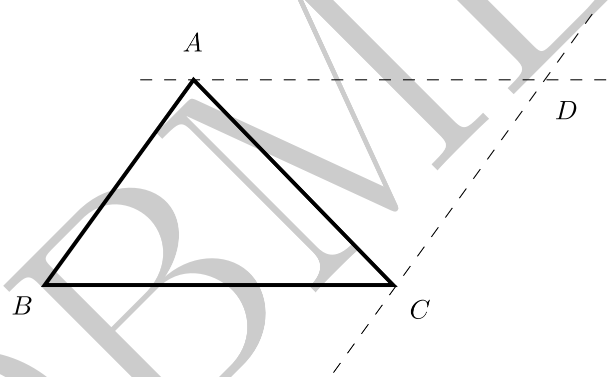
Por outro lado, os triângulos ADE e BCF são *congruentes* (isto é, são "essencialmente iguais", e isso quer dizer que podemos deslocar um deles no espaço até superpô-lo ao outro, sem que haja sobras ou faltas). Assim, podemos "transportar" a área de ADE para a área de BCF, de forma que a medida da área do paralelogramo $ABCD$ é igual à medida da área do retângulo $DEFC$. Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

[1] Nas notações da figura, E é a **projeção ortogonal** de D sobre a reta AB significa que E pertence à reta AB e as retas AB e DE são perpendiculares, isto é, formam um ângulo de $90°$ uma com a outra.

[2] Tal medida comum também é conhecida como a **distância** entre as retas paralelas AB e CD.

Observação 2. *De agora em diante, utilizaremos colchetes para denotar a área de figuras planas. Por exemplo,* $[XYZ]$ *denota a área do triângulo* XYZ *e* $[PQRS]$ *denota a área do quadrilátero* $PQRS$*.*

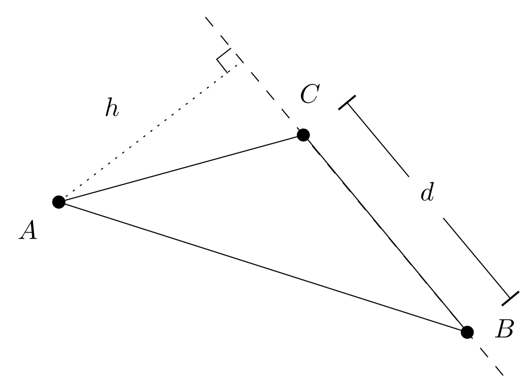
Agora, seja ABC um triângulo (acompanhe o raciocínio na figura a seguir). Considere a reta r, paralela ao lado AB e passando por C, e a reta s, paralela ao lado BC e passando por A. Seja D o ponto de encontro dessas duas retas. Note que $ABCD$ é um paralelogramo, pois, por construção, possui lados opostos paralelos. Além disso, os triângulos ABC e CDA são congruentes (porque?), logo, possuem áreas iguais.



Portanto, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo $ABCD$; assim sendo, é igual à metade do produto do lado $BC = d$ (que funciona como base do paralelogramo) pela altura h, que é a distância do vértice A até a reta BC. Em resumo,

$$[ABC] = \frac{d \times h}{2}.$$

Observação 3. *Qualquer lado do triângulo pode ser considerado como base. A base sempre é relativa a uma altura, que, por sua vez, corresponde ao segmento que liga um vértice à projeção ortogonal deste vértice sobre a reta que contém o lado oposto. A altura pode, inclusive, estar fora do triângulo, conforme mostrado na figura a seguir:*



Na figura anterior, temos um triângulo ABC e a altura relativa ao lado BC, a qual é exterior ao triângulo. Além disso, observe que a base BC não está “na horizontal”, quando dispomos a folha de papel na posição natural de leitura.

Exercício 4. *No triângulo ABC, a medida do lado BC é $60cm$ e a medida do lado AC é $50cm$. Além disso, a altura relativa do lado BC mede $25cm$. Calcule a medida da altura relativa ao lado AC.*

Solução. Considerando BC como base, temos que

$$[ABC] = \frac{60 \times 25}{2} = 750.$$

Por outro lado, considerando AC como base e chamando de h a altura correspondente, temos que:

$$[ABC] = \frac{h \times 50}{2} = 750.$$

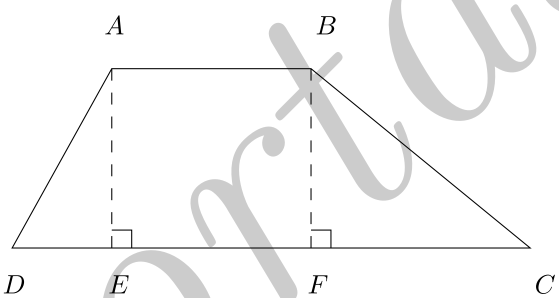
Assim, $h = 30$. □

Observação 5. *Observe que, em todo triângulo retângulo, os **catetos** (isto é, os dois menores lados) podem funcionar tanto como base quanto como altura. Mais ainda, se considerarmos um cateto como base, então o outro será a altura correspondente, e vice-versa.*

Agora, vejamos como calcular as áreas de *trapézios*.

Definição 6. *Um **trapézio** é um quadrilátero que tem um par de lados opostos paralelos. Estes lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio, e a distância entre eles é a **altura** do trapézio.*

Para calcularmos a área do trapézio, multiplicamos sua altura pela média aritmética das medidas das bases. Podemos verificar essa fórmula através da decomposição de áreas ilustrada pela figura a seguir:



Seja $ABCD$ um trapézio, sendo AB a base menor e CD a base maior. Sejam E e F as projeções ortogonais de A e B sobre a reta CD, respectivamente. Veja que

$$[ABCD] = [ADE] + [ABFE] + [BFC].$$

Sejam $AE = BF = h$, $DE = x$, $FC = y$, $AB = EF = b$ e $CD = a = x + b + y$. Temos que

$$[ABCD] = \frac{xh}{2} + bh + \frac{hy}{2}.$$

Colocando o fator $\frac{h}{2}$ em evidência, obtemos:

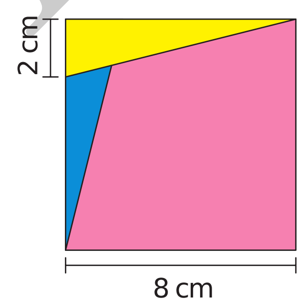
$$[ABCD] = \frac{h}{2}(x + 2b + y) = \frac{h}{2}(a + b).$$

Observação 7. *A dedução que fizemos acima para a fórmula da área de um trapézio não está completa, pois ela não funciona se $A\widehat{D}C > 90^\circ$ ou $B\widehat{C}D > 90^\circ$. Contudo, tal dedução pode ser facilmente adaptada a esse caso, e lhe convidamos a fazer essa adaptação a título de exercício.*

Conhecendo as fórmulas das áreas do triângulo, paralelogramo e trapézio, estamos prontos para os exercícios a seguir.

2 Exercícios

Exercício 8 (OBMEP 2019 - 1a Fase). *O quadrado abaixo está dividido em dois triângulos e um quadrilátero. O triângulo amarelo tem o dobro da área do triângulo azul. Qual é a área do quadrilátero rosa?*

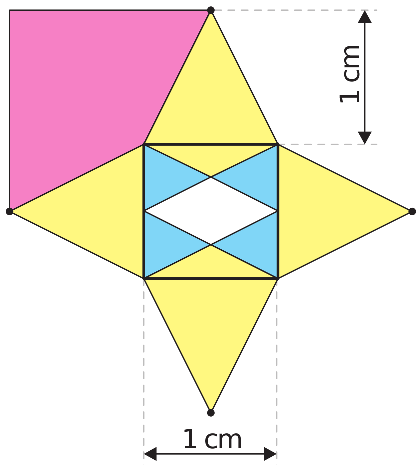


Solução. O triângulo amarelo é retângulo. Portanto, sua área é metade do produto de seus lados menores. Assim, sua área mede $\frac{2\times 8}{2} = 8cm^2$. Logo, a área do triângulo azul é $4cm^2$. Como a área do quadrado é $8 \times 8 = 64cm^2$, a área do quadrilátero rosa será:

$$64 - 8 - 4 = 52cm^2.$$

□

Exercício 9 (OBMEP 2019 - 2a Fase). *Na figura a seguir, o quadrado central tem lados de medida $1cm$. Os quatro triângulos azuis são iguais, assim como os dois triângulos amarelos menores. Os quatro triângulos amarelos maiores têm, cada um deles, base igual ao lado do quadrado, altura com relação a essa base igual a $1cm$ e os outros dois lados de uma mesma medida. Por fim, dois lados do quadrilátero rosa são paralelos aos lados do quadrado. Pergunta-se:*



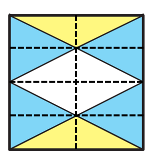
(*a*) *Qual é a área da região formada pelos triângulos azuis?*

(*b*) *Qual é a área da região formada pelos triângulos amarelos?*

(*c*) *Qual é a área do quadrilátero rosa?*

Solução.

(a) O quadrado central tem área igual a $1cm^2$ e pode ser decomposto em 16 triângulos pequenos, todos congruentes entre si, conforme mostrado na figura a seguir:



Oito desses pequenos triângulos são azuis. Logo, a área da região azul é igual a

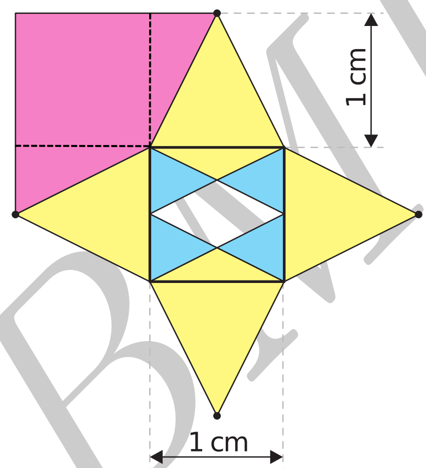
$$8 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5\text{cm}^2.$$

(b) Na figura do item (a), quatro dos triângulos pequenos são amarelos. Assim, a região amarela interna ao quadrado tem área igual a $4 \times \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. A região amarela total é formada por esses quatro triângulos amarelos contidos no quadrado, juntamente com quatro triângulos amarelos maiores. Cada um destes, por sua vez, tem área igual a $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}cm^2$. Portanto, a área da região amarela é igual a

$$4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}25cm^2.$$

(c) A região rosa pode ser decomposta em dois triângulos retângulos congruentes e um quadrado de lado $1cm$, conforme mostrado na próxima figura. Os catetos desses dois triângulos retângulos congruentes medem $\frac{1}{2}$ e 1, logo, as áreas dos triângulos medem $\frac{1/2 \cdot 1}{2} = \frac{1}{4}cm^2$. Assim, a área da região rosa é igual a

$$1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5cm^2.$$



□

Exercício 10 (Enem 2016)**.** *Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno de formato retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7m maior que a largura.*

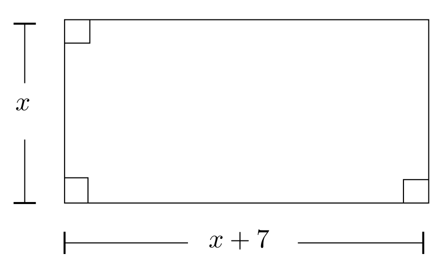


Figura 1: Figura A (ENEM 2016).

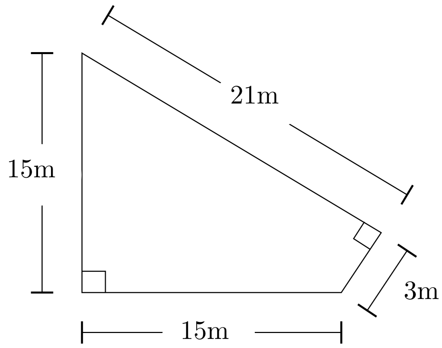


Figura 2: Figura B (ENEM 2016).

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular tal que as medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

(a) $7,5$ *e* $14,5$.

(b) $9,0$ *e* $16,0$.

(c) $9,3$ *e* $16,3$.

(d) $10,0$ *e* $17,0$.

(e) $13,5$ *e* $20,5$.

Solução. Divida o quadrilátero da figura B em dois triângulos retângulos, da maneira óbvia. Somando as áreas desses dois triângulos, chegamos à área do quadrilátero:

$$\frac{15 \times 15}{2} + \frac{21 \times 3}{2} = \frac{288}{2} = 144m^2.$$

A fim de calcular as medidas do terreno adequado ao filho mais novo, temos de encontrar o valor de x tal que

$$x(x+7) = 144.$$

Analisando os valores dos itens[3], concluímos que a solução é $x = 9$ e $x + 7 = 16$. □

3 Sugestões ao professores

Separe a aula em dois encontros de 50 minutos cada. No primeiro encontro, apresente as fórmulas das áreas para triângulos, paralelogramos e trapézios. Se possível, utilize desenhos cortados em uma folha de papel para ilustrar a decomposição e reorganização das áreas das figuras. No segundo encontro, resolva os exercícios, deixando um tempo para que os alunos pensem um pouco nos problemas e procurem suas próprias soluções, antes de apresentá-las.

A referência a seguir contém muito mais sobre Geometria Plana, num nível adequado a alunos de sexto ano.

[3]De maneira geral, em situações como essa, o procedimento-padrão seria resolver a equação quadrática $x(x+7) = 144$ para encontrar o valor de x. Porém, alunos do sexto ano não estão familiarizados com essa ferramenta, razão pela qual optamos pela análise dos itens.

Referências

[1] Bruno Holanda and Emiliano A. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 2: Primeiros passos em Geometria*. IMPA, 2020.