Material Teórico - Módulo de FRAÇÃO COMO PORCENTAGEM E COMO PROBABILIDADE

Fração como Probabilidade

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

Portal da Matemática
OBMEP

1 Introdução

Nesta aula iremos apresentar conceitos introdutórios sobre Probabilidade, área da Matemática que dedica-se a entender e estudar fenômenos *aleatórios*, ou seja, situações nas quais o resultado é *não determinístico* (i.e., tal que não podemos prever com certeza o que vai acontecer). Por exemplo, ao lançarmos uma moeda, não sabemos se o resultado será cara ou coroa. Ao lançamos um dado, não sabemos qual será a face que ficará apontada para cima.

Os possíveis resultados de um experimento são conhecidos como **eventos**. Assim, ao lançarmos um dado, alguns dos eventos possíveis são: face de cima igual 3, face de cima par, face de cima primo, face de cima menor do que 4 etc.

O **espaço amostral** é o evento que reúne todos os possíveis resultados de um experimento. No caso do experimento ser o lançamento de um dado, uma única vez, o espaço amostral é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aqui, assumiremos sempre que os espaços amostrais relacionado aos experimentos que discutiremos sempre serão conjuntos *finitos*, i.e., com somente um número finito de elementos. (Em contraposição, observe que o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ dos números naturais é infinito.)

Em particular, observe que todo subconjunto de um conjunto finito é também um conjunto finito, e que um evento E em um espaço amostral A, sendo a coleção dos possíveis resultados de um experimento realizado nesse espaço amostral, é um subconjunto finito de A. Dessa forma, a definição a seguir tem sentido.

Definição 1. *Se E é um evento em um espaço amostral A, a* **probabilidade** *de E é dada por:*

$$P(E) = \frac{\#E}{\#A},$$

em que $\#X$ denota o número de elementos do conjunto X.

Por exemplo, em relação ao experimento de lançar um dado e observar o número estampado em sua face superior, se $E = \{1, 3, 5\}$, então

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a probabilidade do número da face superior ser ímpar é de $\frac{1}{2} = 50\%$.

Por definição, veja que a probabilidade sempre deverá ser um número de 0 a 1. Realmente, como um evento é um subconjunto do espaço amostral, devemos ter

$$0 \leq \#E \leq \#A,$$

de sorte que

$$0 \leq P(E) = \frac{\#E}{\#A} \leq 1.$$

A seguir, faremos alguns exercícios com o objetivo de treinar estes conceitos.

Exercício 2. *O pai de Carlos e Felipe comprou uma bicicleta nova para os filhos. Para decidir quem seria o primeiro a dar uma volta no brinquedo novo, Carlos sugeriu ao seu irmão tirar no par ou ímpar. As regras são simples: cada irmão deve escolher simultaneamente um número de 1 a 5 (inclusive) e depois somar os dois números escolhidos. Caso o resultado seja par, Felipe vence; caso seja ímpar, quem vence é Carlos. Essa é uma forma justa de decidir quem será o primeiro a andar de bicicleta?*

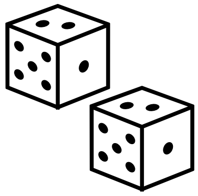
Solução. Veja que existe um total de 25 possíveis resultados para este jogo de par ou ímpar. Podemos organizá-los na seguinte tabela:

+	1	2	3	4	5
1	P	I	P	I	P
2	I	P	I	P	I
3	P	I	P	I	P
4	I	P	I	P	I
5	P	I	P	I	P

Veja que a opção P (referente a um resultado *par*) aparece 13 vezes, enquanto a opção I (referente a um resultado *ímpar*) aparece 12 vezes. Dessa forma, considerando que cada garoto escolhe seu número de forma aleatória e uniforme, a probabilidade do resultado ser par é $\frac{13}{25}$. Ou seja, é mais provável de ocorrer um resultado par do que um resultado ímpar, cuja probabilidade é $\frac{12}{25}$. □

Nos próximos dois exercícios, utilizaremos os conceitos de *dado honesto* e *moeda honesta*, em contraposição aos de *dado viciado* e *moeda viciada*. Num dado honesto, a probabilidade do número da face superior após um lançamento ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 é sempre a mesma, independente do resultado. Em outras palavras, tal probabilidade é sempre igual a $\frac{1}{6}$. Numa moeda honesta, as probabilidades de obtermos cara ou coroa como resultado de um lançamento são ambas iguais a $\frac{1}{2}$.

Exercício 3. *Dois dados cúbicos, honestos e iguais são jogados simultaneamente e, em seguida, os resultados são somados. Qual é a soma mais provável de aparecer?*



Solução. Primeiramente, fazemos uma tabela que coleciona todos os $6 \times 6 = 36$ possíveis resultados. Pela tabela, é fácil perceber que o número que aparecerá mais vezes será o 7, num total de exatamente seis vezes.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Portanto, a probabilidade de 7 ser o resultado final é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $\square$

Exercício 4. *Joaquim irá fazer um teste com 20 questões objetivas, com cinco alternativas de resposta cada uma. Se Joaquim não estudar e resolver chutar as respostas, qual a probabilidade dele acertar todas as questões?*

Solução. Se para cada questão há cinco alternativas distintas, existem

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \ldots \times 5}_{20 \text{ vezes}} = 5^{20}$$

formas diferentes de escolher as vinte respostas (para se convencer disso, comece examinando o caso de escolher as respostas a duas questões, havendo cinco possibilidades para cada uma; tais possibilidades geral uma tabela de dimensões 5×5, e cada uma das $25 = 5^2$ entradas da tabela corresponde a uma escolha simultânea de respostas para as duas questões. Em seguida, suponha que houvesse uma terceira questão, também com cinco possíveis alternativas de resposta; então, juntamente com as 25 possibilidades para as respostas das duas primeiras questões, teríamos agora uma tabela de dimensões 25×5, totalizando $125 = 5^3$ entradas. Prosseguindo de forma análoga, concluímos que as vinte questões geram 5^{20} possibilidades distintas de escolhas de respostas.)

Note que há apenas uma forma de se acertar todas as vinte questões. Considerando que os *chutes* de Joaquim sejam realmente aleatórios (i.e., que ele realmente não pare para pensar em nenhuma questão), a probabilidade dele marcar corretamente todas as respostas é $\frac{1}{5^{20}}$. $\square$

Exercício 5. *Uma moeda honesta é jogada três vezes. Qual a probabilidade de aparecer pelo menos uma cara?*

Solução. Começamos descrevendo todos os possíveis resultados que podem ser obtidos ao se jogar uma moeda três vezes:

(Cara, Cara, Cara),
(Cara, Cara, Coroa),
(Cara, Coroa, Cara),
(Cara, Coroa, Coroa),
(Coroa, Cara, Cara),
(Coroa, Cara, Coroa),
(Coroa, Coroa, Cara),
(Coroa, Coroa, Coroa).

Dessa forma, o espaço amostral tem 8 possíveis resultados, sendo 7 deles com pelo menos uma cara. Logo, a probabilidade solicitada é $\frac{7}{8}$. $\square$

Exercício 6. *Em uma sala do sexto ano, ao sorteamos uma pessoa ao acaso, a probabilidade dessa pessoa ser uma garota é de $\frac{4}{7}$. Se existem entre 55 e 60 alunos na sala, calcule quantos são os garotos.*

Solução. Lembrando que probabilidade significa casos favoráveis dividido por casos totais, e que toda fração equivalente a $\frac{4}{7}$ tem um múltiplo de 7 no denominador, concluímos que o número total de alunos nessa sala do sexto ano deve ser um múltiplo de 7. Veja, ainda, que o único número múltiplo de 7 entre 55 e 60 é 56. Portanto, este é o número total de alunos na sala.

Agora, para a probabilidade de um aluno ser uma garota ser igual a $\frac{4}{7}$, devemos procurar a fração equivalente a $\frac{4}{7}$ e cujo denominador seja igual a 56. Isso é fácil, se observarmos que $56 = 7 \cdot 8$:

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 8}{7 \cdot 8} = \frac{32}{56}.$$

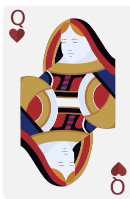
Logo, temos 32 garotas e $56 - 32 = 24$ garotos. $\square$

Exercício 7. *Um ciclo completo de um semáforo demora 120 segundos. Em cada ciclo, o semáforo está no verde durante 50 segundos, no amarelo durante 10 segundos e no vermelho durante 60 segundos. Se o semáforo for visto ao acaso, qual é a probabilidade de que não esteja no verde?*

Solução. O espaço amostral é todo o intervalo de 120 segundos. Para que o semáforo não esteja verde, ele deve estar vermelho ou amarelo. Como ele fica nessas cores durante $60 + 10 = 70$ segundos, a probabilidade solicitada é $\frac{70}{120} = \frac{7}{12}$. $\square$

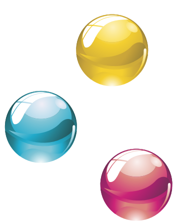
Para o próximo exercício, recorde que um baralho tradicional tem 52 cartas, divididas em 4 naipes (copas, espadas, ouro e paus). Cada naipe tem 13 cartas: um ás, 9 cartas numeradas de 2 a 10, uma dama, um valete e um rei.

Exercício 8. *Uma pessoa retirou uma dama de um baralho de 52 cartas e, a seguir, retirou uma segunda carta. Qual é a probabilidade de que essa segunda carta também seja uma dama?*



Solução. Ao retirarmos a primeira carta, o baralho ficará com $52-1=51$ cartas. Como o baralho tem quatro damas e retiramos uma na primeira carte, restarão três damas em nosso espaço amostral. Logo, a probabilidade solicitada deve ser igual a $\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$. □

Exercício 9. *Em uma urna há 9 bolas: três vermelhas, quatro amarelas e duas azuis. Retira-se uma primeira bola, que não é amarela. Ao retirar-se ao acaso uma segunda bola, qual é a probabilidade de que ela seja amarela?*



Solução. Uma vez que a primeira bola retirada não foi amarela, concluímos que a quantidade de bolas amarelas dentro da urna (quatro) não se alterou. Porém, a quantidade total de bolas diminuiu em uma unidade, de forma que, agora, temos $9-1=8$ bolas na urna. Portanto, a probabilidade de que a segunda bola retirada seja amarela é $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=50\%$. □

Exercício 10. *Carlos possui uma urna com cinco bolas verdes e sete bolas azuis. Ele deseja adicionar uma certa quantidade de bolas verdes na urna, de modo que a probabilidade de se retirar uma bola verde dobre, em relação à probabilidade inicial desse experimento. Quantas bolas verdes ele deve colocar?*

Solução. Inicialmente, é agora fácil perceber que a probabilidade de se retirar uma bola verde é $\frac{5}{12}$. Observe também que o dobro desta fração é

$$\frac{5}{12}\cdot 2=\frac{5}{6}.$$

Agora, quando aumentamos o número de bolas verdes, alteramos tanto o número de resultados favoráveis quanto o tamanho do espaço amostral. Como não sabemos a quantidade de bolas verdes que deverão ser acrescentadas, representaremos este valor desconhecido por x. Neste caso, o novo número de bolas verdes será $5+x$ e o novo número de bolas totais será $12+x$. Portanto, a nova probabilidade será $\frac{5+x}{12+x}$, e chegamos à seguinte equação:

$$\frac{5+x}{12+x}=\frac{5}{6}.$$

Multiplicando em $\times$, obtemos $6(5+x)=5(12+x)$ ou, o que é o mesmo,

$$30+6x=60+5x.$$

Resolvendo a equação acima, cheamos a $x=30$, e concluímos que devem ser acrescentadas 30 bolas verdes. □

Ainda em relação ao exercício anterior, vale observar que muitos alunos do sexto ano não estão familiarizados com a solução de exercícios utilizando equações. Neste caso, recomenda-se ao professor uma solução via tentativas, do seguinte modo: primeiro, verifica-se a probabilidade quando é acrecentada 1 bola verde, em seguida 2 etc, até que a turma perceba que é necessário somar uma quantidade de bolas verdes que seja múltipla de 6, uma vez que a fração $\frac{5}{6}$ é irredutível. Então, teste sucessivamente aumentos de 6, 12, 18 etc, até 30 bolas, achando, assim, a solução correta.

2 Sugestões ao Professor

Separe dois encontros de 50 minutos cada para apresentar os conceitos fundamentais de probabilidade e resolver os exercícios dessa lista. Ao longo da aula, destaque a importância da descrever corretamente o espaço amostral para solucionar os exercícios que envolvem probabilidade. Aproveite o encontro para revisar os conceitos de frações equivalentes e porcentagens. Outra atividade útil (e lúdica), ao longo do primeiro encontro, seria realizar alguns experimentos (disputas de “par ou ímpar”) para verificar que a frequência relativa de ocorrência dos resultados do exercício 2 se aproxima da probabilidade prevista na solução, à medida que aumentamos a quantidade de experimentos. (Existe um resultado avançado em Matemática que garante exatamente isso: se o número de testes for grande o suficiente, então as frenquêcias relativas dos resultados dos experimentos irão se aproximar das probabilidades reais calculadas com a ajuda da tabela.)

A Teoria da Probabilidade é uma área da Matemática que possui muitas aplicações práticas. De fato, muitos métodos estatísticos são baseados em resultados profundos desse campo de conhecimento. À guisa de ilustração, aconselhamos ao professor apresentar à sua turma, ao final dos dois encontros, alguns dados estatísticos simples retirados de pesquisas do IBGE, interpretando-os como probabilidades.

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com