Material Teórico - Inequações Produto e Quociente de Primeiro Grau

Sistemas de inequações

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

25 de agosto de 2018

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Sistemas de inequações com uma variável

Um sistema é um conjunto de equações ou inequações que devem ser satisfeitas simultaneamente. Uma diferença importante entre inequações e equações se dá quando queremos resolver sistemas de cada um desses tipos. Quando temos um sistema com várias equações, podemos usar, sem restrições, tanto o método da adição quanto o da substituição para resolvê-lo. Por outro lado, para sistemas de inequações esses métodos devem ser evitados. Se tivermos duas inequações em direções opostas (por exemplo, uma do tipo "$\geq$" e a outra do tipo "$\leq$"), não será permitido somá-las. Além disso, mesmo quando tivermos duas inequações com o mesmo sinal, ao somá-las (o que, nesse caso, é permitido) obteremos uma inequação verdadeira, mas podemos perder informação. De outra forma, ao somar duas inequações, o conjunto solução da inequação resultante pode conter valores que não são soluções do sistema original.

A fim de evitar esses erros, devemos adotar outras técnicas para resolver sistemas de inequações.

Aqui, estudaremos apenas o caso mais fácil, qual seja, aquele em que todas as inequações do sistema envolvem uma única variável. Neste caso, só precisamos encontrar o conjunto solução de cada inequação separadamente e, em seguida, fazer a interseção desses conjuntos.

Exemplo 1. *Em cada um dos itens abaixo, encontre todos os valores reais de x que satisfazem a inequação dada.*

(a) $2 < 2x < 3$.

(b) $0 \leq 3 - x < 5$.

Solução.
(a) Observe que a expressão $2 < 2x < 3$, em verdade, representa duas inequações separadas, que devem ser satisfeitas simultaneamente: $2 < 2x$ e $2x < 3$. Escrevemos isso como abaixo:

$$\begin{cases} 2 < 2x, \\ 2x < 3. \end{cases}$$

A primeira inequação, $2 < 2x$, equivale a $1 < x$, pois dividir ambos os lados por 2 não altera o sinal da inequação. A segunda, pelo mesmo motivo, equivale a $x < 3/2$. Portanto, para satisfazer ambas as inequações, devemos ter $1 < x < 3/2$, ou seja, x pertence ao intervalo aberto $(1, 3/2)$. Este intervalo é o conjunto solução procurado:

$$S = (1, 3/2) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3/2\}.$$

Observação: neste caso em particular, poderíamos ter dividido por 2 simultaneamente ambas as inequações do enunciado, obtendo diretamente a solução:

$$2 < 2x < 3 \iff 2/2 < x < 3/2.$$

Contudo, em inequações mais complexas, quase sempre precisamos fazer operações diferentes com cada uma das inequações. Portanto, em geral será necessário trabalhar com cada inequação separadamente.

(b) Como antes, escrevamos separadamente as duas inequações:

$$\begin{cases} 0 \leq 3 - x, \\ 3 - x < 5. \end{cases}$$

Usando a primeira inequação, temos que:

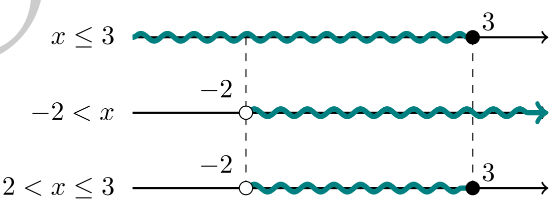
$$0 \leq 3 - x \iff x \leq 3.$$

Para a segunda inequação temos que:

$$3 - x < 5 \iff 3 < 5 + x \iff -2 < x.$$

Como essas duas inequações precisam ser satisfeitas simultaneamente, segue que $-2 < x \leq 3$. Usando a notação de intervalos, o conjunto solução é $S = (-2, 3]$.

Ainda em relação ao item (b), note que podemos representar graficamente a solução da seguinte forma: na primeira linha, marcamos na reta real os valores de x que satisfazem a primeira inequação ($x \leq 3$). Na segunda linha, marcamos os valores que satisfazem a segunda inequação ($x > -2$). Por fim, na última linha, marcamos os valores de x que satisfazem as duas inequações simultaneamente.



Veja que essa marcação dos pontos na reta é bem diferente da análise de sinal que vinhamos fazendo nos módulos anteriores. Realmente, não estamos marcando na reta quais intervalos são positivos ou negativos e nem estamos trabalhando com produtos de sinais. Estamos apenas marcando os conjuntos de pontos que pertencem à solução de cada inequação e, depois, tomando a interseção desses conjuntos; de outra forma, o trecho marcado na última reta corresponde ao trecho comum marcado em todas as retas anteriores.

□

Exemplo 2. *Em cada item, encontre os valores reais de x que satisfazem o sistema dado:*

(a) $\begin{cases} x + 3 < 3(x + 4), \\ 4x \geq 5 - x. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 12 > 0, \\ -3x - 3 > 0. \end{cases}$

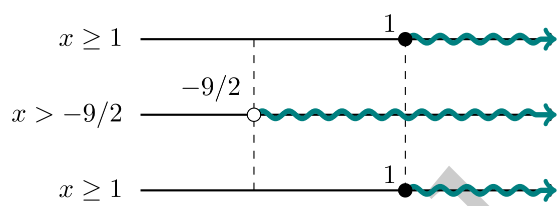
Solução.
(a) Simplificando a primeira inequação, temos as seguintes inequações equivalentes:

$$
\begin{aligned}
x + 3 &< 3(x+4)\\
x + 3 &< 3x + 12\\
-2x &< 9\\
x &> -\frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

(Observe que, no último passo, ao dividir ambos os lados da inequação por -2 tivemos que inverter o sinal da desigualdade.) Continuando, da segunda inequação do sistema temos as inequações equivalentes

$$
\begin{aligned}
4x &\geq 5 - x\\
5x &\geq 5\\
x &\geq 1.
\end{aligned}
$$

Assim, chegamos a duas restrições que devem ser satisfeitas simultaneamente: $x > -9/2$ e $x \geq 1$. Como $1 > -9/2$, todos os x que satisfazem $x \geq 1$ também satisfazem $x > -9/2$. Uma maneira simples de visualizar isso é marcando as soluções de cada inequação na reta real e fazendo suas interseções:



Assim, o conjunto solução é

$$S = (1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}.$$

(b) Resolvendo a primeira inequação, temos

$$2x + 12 > 0 \iff 2x > -12 \iff x > -6.$$

Agora, resolvendo a segunda temos

$$-3x - 3 > 0 \iff -3x > 3 \iff x < -1.$$

(Novamente, observe a mudança de sinal na última desigualdade acima, ao dividirmos ambos os membros pelo número negativo (-3).)

Dessa forma, para satisfazer o sistema, devemos satisfazer $x > -1$ e, ao mesmo tempo, $x < -1$. Mas isso é impossível, de modo que não existe valor para x que satisfaça o sistema. Assim, seu conjunto solução é o conjunto vazio: $S = \emptyset$. □

Exemplo 3. *Resolva, no conjunto universo dos números reais, o sistema de inequações abaixo.*

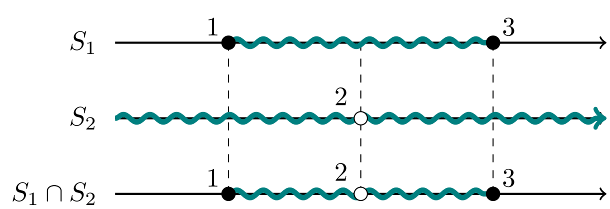
$$
\begin{cases}
(x-1)(x-3) \leq 0,\\
(x-2)^2 > 0.
\end{cases}
$$

Solução. Como nos exemplos anteriores, vamos começar analisando separadamente cada uma das inequações. A primeira, $(x-1)(x-3) \leq 0$, é uma inequação produto. Já resolvemos várias delas nos módulos anteriores. Caso necessário, revise algumas dessas soluções antes de prosseguir. Façamos o estudo do sinal das funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x - 3$. Como essas funções são lineares com o coeficiente de x positivo, ambas são crescentes. A função $f(x)$ é zero apenas quando $x = 1$, é positiva para $x > 1$ e negativa para $x < 1$. Por sua vez, a função $g(x)$ é zero quando $x = 3$, é positiva quando $x > 3$ e é negativa quando $x < 3$. Marcando as raízes 1 e 3 em uma mesma reta, podemos analisar o sinal em cada intervalo determinado por estes pontos. Veja o quadro seguinte:

		1		3		x
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
S_1						

Adicionamos uma última linha ao quadro, onde marcamos os pontos tais que $(x-1)(x-3) \leq 0$, ou seja, o conjunto-solução da primeira inequação, $S_1 = [1,3]$.

Vamos, agora, resolver a segunda inequação: $(x-2)^2 > 0$. Lembre-se de que o quadrado de todo número real é não negativo. Assim, para qualquer valor de x, temos $(x-2)^2 \geq 0$. Daí, a única maneira de um real x *não* satisfazer a inequação do enunciado é se $(x-2)^2 = 0$, ou seja, se $x = 2$. Dessa forma, todo número real diferente de 2 satisfaz a segunda inequação, e seu conjunto solução é $S_2 = \mathbb{R} - \{2\}$.



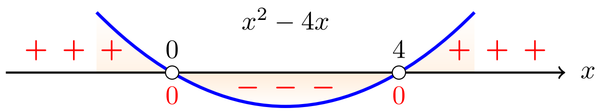
Finalmente, os valores de x que satisfazem o sistema devem estar na interseção de S_1 e S_2, daí, $1 \leq x \leq 3$ *e* $x \neq 2$. Equivalentemente, como 2 está entre 1 e 3, devemos ter $1 \leq x < 2$ *ou* $2 < x \leq 3$. Assim, o conjunto-solução do sistema é

$$
\begin{aligned}
S &= S_1 \cap S_2\\
&= [1,3] - \{2\}\\
&= [1,2) \cup (2,3].
\end{aligned}
$$
□

Exemplo 4. *Encontre o conjunto solução do sistema a seguir em* $\mathbb{R}$*:*

$$
\begin{cases}
-x(4-x) > 0,\\
(1-x)(1+x) \leq 0.
\end{cases}
$$

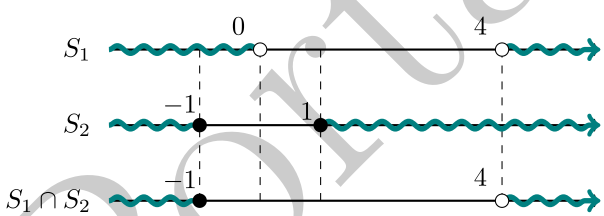
Solução. Assim como no exemplo anterior, podemos resolver a inequação $-x(4-x) > 0$ como uma inequação produto, analisando separadamente o sinal de $-x$ e o sinal de $4-x$. Em busca de uma solução alternativa, podemos observar diretamente que a função $f(x) = -x(4-x) = x^2 - 4x$ é uma função quadrática que possui como raízes os números 0 e 4. Veja, ainda, que o coeficiente de x^2 é positivo, de forma que o gráfico de $f(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para cima. Assim, a variação do sinal de $f(x)$ segue o seguinte esquema:



Como o enunciado pede que $-x(4-x) = x^2 - 4x$ seja maior que zero, temos que $x < 0$ ou $x > 4$, ou seja, o conjunto solução da primeira inequação é o intervalo $S_1 = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$.

Considere, agora, a segunda inequação: $(1-x)(1+x) \leq 0$. Vamos analisar o sinal da função $g(x) = (1-x)(1+x)$. Como $g(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$, seu gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, a qual intersecta o eixo horizontal nos pontos de abscissas -1 e 1 (tente desenhá-lo). Dessa forma, $g(x) \leq 0$ quando $x \leq -1$ ou $x \geq 1$, e o conjunto solução da segunda inequação é $S_2 = (\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Por fim, os valores de x que satisfazem o sistema são aqueles que satisfazem ambas as inequações, ou seja, tais que estão na interseção de S_1 com S_2. Neste exemplo, ajuda bastante desenhar os conjuntos S_1 e S_2 na reta real. Como nos exemplos anteriores, marcamos S_1 em uma reta e S_2 em outra, com o cuidado de que as coordenadas x fiquem alinhadas de uma reta para outra. Então, em uma terceira reta, abaixo das duas primeiras, marcamos a interseção de S_1 e S_2.



Percebemos que a solução do sistema consiste dos valores reais de x taisq que $x \leq -1$ ou $x > 4$. Assim, o conjunto-solução é

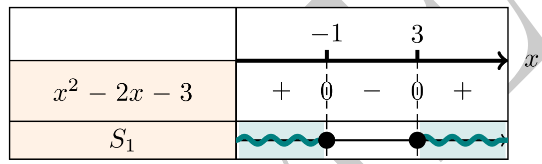
$$
\begin{aligned}
S &= S_1 \cap S_2 \\
&= (-\infty, -1] \cup (4, \infty).
\end{aligned}
$$

□

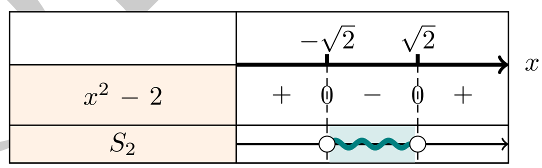
Exemplo 5. *Encontre todos os valores reais de x que satisfazem simultaneamente as inequações $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ e $x^2 - 2 < 0$.*

Solução. Primeiramente, vamos resolver cada inequação individualmente.

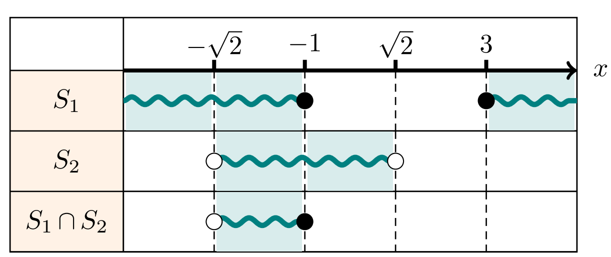
Sejam $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = x^2 - 2$. Para resolver $f(x) \geq 0$, encontramos primeiro as raízes de $x^2 - 2x - 3 = 0$, que são -1 e 3 (para mais detalhes sobre esse ponto, reveja as aulas sobre equações de segundo grau). Vamos chamar de S_1 o conjunto dos valores reais de x que satisfazem $f(x) \geq 0$. Como, $f(x)$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, o quadro de sinais de $f(x)$ é como segue (já marcamos, na última linha do quadro, o conjunto S_1):



Agora, a fim de resolver a inequação $g(x) < 0$, começamos notando que a equação $x^2 - 2 = 0$ possui $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ como raízes. O gráfico da função $g(x)$ também é uma parábola com concavidade para cima. Logo, seu quadro de sinais e o conjunto-solução S_2 de $g(x) < 0$ são os indicados abaixo:



Para finalizar, marcamos os conjuntos S_1 e S_2 em um único quadro, observando que $-\sqrt{2} < -1 < \sqrt{2} < 3$. A solução final, S, consiste dos intervalos marcados na linha do quadro indicada com $S_2 \cap S_2$. Como não temos interesse em fazer produtos de sinais, para não causar confusão é até melhor omitir os sinais do quadro, indicando apenas quais trechos fazem parte de cada conjunto. O resultado é o seguinte:



$$S = S_1 \cap S_2 = (-\sqrt{2}, -1].$$

□

2 Exercícios complementares

Nesta seção, reunimos mais alguns exercícios sobre sistemas de inequações.

Exemplo 6. *Quantos números **inteiros** satisfazem o sistema de inequações a seguir?*

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0, \\ 2x + 1 > x + 5. \end{cases}$$

Solução. Resolveremos o sistema como de costume, encontrando seu conjunto solução e, ao final, contaremos quantos números inteiros pertencem a tal conjunto.

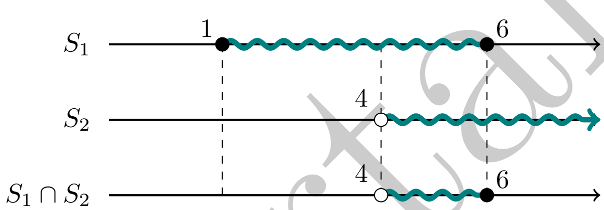
Assim, vamos começar resolvendo a inequação $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Considere a função $f(x) = x^2 - 7x + 6$. Resolvendo inicialmente a equação $x^2 - 7x + 6 = 0$, percebemos que $f(x)$ possui raízes $x = 1$ e $x = 6$. Como $f(x)$ possui concavidade para cima, desenhando seu gráfico ou fazendo seu quadro de sinais (tente fazer um deles), vemos que $f(x) \leq 0$ quando x é igual ou está entre as raízes, ou seja, quando $1 \leq x \leq 6$. Assim, $S_1 = [1{,}6]$.

Agora, vejamos a segunda inequação, $2x + 1 > x + 5$. Subtraindo $x - 1$ de ambos os lados, obtemos a sequência de inequações equivalentes

$$\begin{gathered} 2x + 1 > x + 5 \\ (2x + 1) - (x + 1) > (x + 5) - (x + 1) \\ x > 4. \end{gathered}$$

Assim, $S_2 = (4, \infty)$.

Desenhando S_1 e S_2 em retas separadas e, em seguida, marcando sua interseção, obtemos o quadro abaixo:



Assim, $S = S_1 \cap S_2 = (4{,}6]$. Veja que o número 4 não faz parte deste intervalo, de sorte que os únicos números inteiros que fazem parte da solução são 5 e 6. Como o enunciado pergunta *quantos* inteiros satisfazem o sistema, a resposta é *dois*. □

Exemplo 7. *Encontre todos os números reais x que satisfazem o sistema*

$$\begin{cases} (x - 1)(x^2 - 6x + 5)(x - 5) \leq 0, \\ 2x^2 > 20. \end{cases}$$

Solução. Considere primeiramente a inequação produto $(x - 1)(x^2 - 6x + 5)(x - 5) \leq 0$. Ela parece que nos dará trabalho, pois para resolvê-la teríamos, em princípio, de analisar os sinais de três funções. Contudo, podemos simplificá-la bastante se fatorarmos o fator do meio, $x^2 - 6x + 5$. Como 1 e 5 são as raízes de $x^2 - 6x + 5 = 0$, temos que $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$. Substituindo isso na inequação original, obtemos que ela é equivalente a

$$(x - 1)^2(x - 5)^2 \leq 0.$$

Acontece que, como o expoente de todos os fatores é par, para todo x real temos

$$(x - 1)^2(x - 5)^2 \geq 0.$$

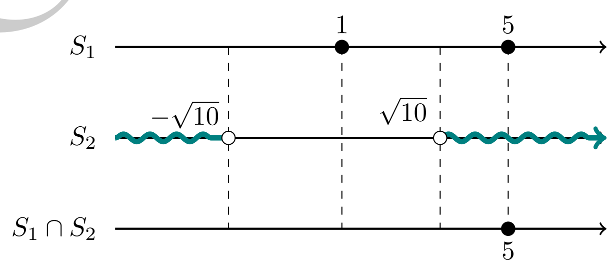
Sendo assim, a única opção para x é satisfazer

$$(x - 1)^2(x - 5)^2 = 0,$$

o que claramente implica $x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0$, isto é, $x = 1$ ou $x = 5$. Desse modo, o conjunto-solução da primeira inequação é $S_1 = \{1, 5\}$.

Agora, a segunda inequação requer que $2x^2 > 20$, o que equivale a $x^2 > 10$. Para terminar, basta observar que, dentre os números 1 e 5, apenas o número 5 satisfaz $5^2 > 10$. Logo, $x = 5$ é a única solução do sistema.

Em alternativa ao último parágrafo, poderíamos marcar as soluções das inequações em retas, como vínhamos fazendo. Para isso, veja que o conjunto solução de $x^2 > 10$ consiste nos valores de x tais que $x > \sqrt{10}$ ou $x < -\sqrt{10}$. Ao marcar esses pontos na reta, observe que $3 < \sqrt{10} < 4$.



Veja que, na reta correspondente a S_1, não marcamos nenhum intervalo, pois apenas os pontos 1 e 5 são solução. □

Nosso último exemplo é o de um sistema com três inequações. O método de resolução é o mesmo: resolver cada inequação separadamente e encontrar os pontos que estão nas soluções de *todas elas*.

Exemplo 8. *Encontre o conjunto-solução do seguinte sistema, onde x é um número real:*

$$\begin{cases} 2x + 3 > 1, \\ \dfrac{x^2}{2} \geq 3x - 4, \\ 10 \leq 30 - 4x. \end{cases}$$

Solução. Resolvendo a primeira inequação, temos as seguintes inequações equivalentes:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &> 1 \\ 2x &> -2 \\ x &> -1. \end{aligned}$$

Logo, $S_1 = (-1, \infty)$.

Quando à segunda inequação do sistema, temos que ela equivale a

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \geq 0.$$

Para resolver essa inequação quadrática começamos, como sempre, procurando as raízes da equação

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 4 = 0.$$

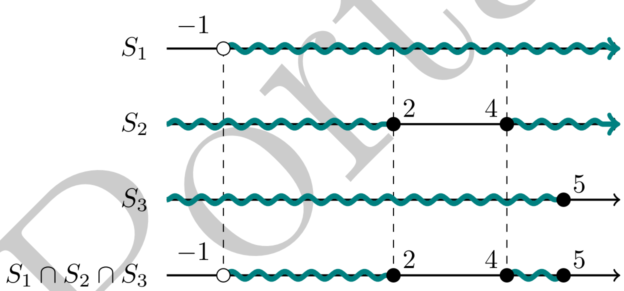
Podemos fazer isso usando a fórmula de Bhaskara ou procurando dois números cuja soma seja $\frac{-(-3)}{1/2} = 6$ e cujo produto seja $\frac{4}{1/2} = 8$; adotando essa última estratégia, após testar algumas opções vemos que esses dois números são $x = 2$ ou $x = 4$. Analisando o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 4$, temos que $f(x) \geq 0$ quando $x \leq 2$ ou $x \geq 4$. Assim, $S_2 = [-\infty, 2] \cup [4, \infty]$.

Resolvendo a terceira inequação do sistema original, temos as equivalências

$$\begin{aligned} 10 &\leq 30 - 4x \\ 4x &\leq 20 \\ x &\leq 5. \end{aligned}$$

Dessa forma, o conjunto solução desta última inequação é $S_3 = (-\infty, 5]$.

Resta apenas encontrar $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$. Façamos isso graficamente:



Então, temos que $S = (-1{,}2] \cup [4{,}5]$.

□

Dicas para o Professor

O conteúdo deste material pode ser apresentado em dois encontros de 50 minutos. Pode ser interessante fazer uma revisão sobre união e interseção de conjuntos e também sobre a notação utilizada para descrever intervalos de números reais.

Neste aulas e nas aulas anteriores deste módulo, preferimos usar as notações (a,b) para intervalos abertos e $[a,b]$ para intervalos fechados. Essas são as notações mais usadas modernamente em Matemática, mas alguns livros e as próprias vídeo-aulas do portal utilizam a notação $]a,b[$ para intervalo aberto. A única desvantagem que vemos de usar (a,b) é que é necessário distinguir o intervalo (a,b) do par ordenado (a,b). Apesar de usarmos os mesmo símbolos para as duas coisas, esses são conceitos completamente diferentes e pode-se distinguir um do outro facilmente, a partir do contexto em que são utilizados.

Há uma grande quantidade de variações de problemas envolvendo sistemas de inequações, alguns com grau de dificuldade bastante alto. Nesse sentido, a referência [2] traz muitos problemas que o professor pode utilizar em sala de aula, ao passo que a referência [1] traz outros tantos, adequados a sessões de treinamento para olimpíadas de Matemática.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.