**Material Teórico - Módulo de INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA**

# Estruturas Básicas

## Tópicos Adicionais

**Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda**
**Autor: Prof. Antonio Caminha Muniz Neto**

**12 de março de 2019**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Introdução

Uma das principais características da Matemática é sua capacidade de oferecer um conjunto de métodos diferentes para resolver diversos tipos de problemas. Um tipo bem comum de problema é aquele que pede a resposta numérica para determinado tipo de pergunta. Exemplificamos uma tal situação com a pergunta a seguir.

**Exemplo 1.** *Qual é o primeiro dígito não nulo do número* $50!$ *quando este é lido da direita para esquerda?*

Outro tipo de problema é aquele que pede para demonstrar uma determinada propriedade. Um exemplo disso é o seguinte.

**Exemplo 2.** *Mostre que, em um conjunto de cinco números inteiros quaisquer, sempre é possível escolher um subconjunto de três deles cuja soma é divisível por* $3$.

Para resolver o primeiro tipo de problema acima temos dois caminhos a seguir: ou temos alguma "ideia esperta" que nos permita descobrir a resposta com poucos cálculos, ou utilizamos a "força bruta" e resolvemos o problema com o auxílio de uma calculadora potente e muita paciência.

Por outro lado, para resolver o segundo tipo de problema, precisamos de uma estrutura formal de argumentação baseada na Lógica Matemática, a fim de criar uma "cadeia de ideias" que, a partir de "conceitos elementares" e "regras de inferência", nos permita chegar a "conclusões complexas". Mais importante: veja que, para resolver esse tipo de problema, uma calculadora ou computador é, usualmente, inútil.

Um dos objetivos desse módulo é o de apresentar métodos que permitam a demonstração de propriedades como aquela ilustrada no Exemplo 2. Para tanto, precisamos, inicialmente, formalizar o que chamamos, no parágrafo anterior, de "conceitos elementares", "cadeia de ideias", "regras de inferência" e "conclusões complexas". Faremos isso, entrando no campo da *Filosofia da Matemática*, conforme proposta por Aristóteles[1]

# 2 A Estrutura da Matemática

Segundo Aristóteles, a Matemática é uma ciência dedutiva que baseia-se em três conceitos primitivos: os *axiomas*, as *hipóteses* e as *definições*.

Um **axioma** ou **postulado** é uma sentença que não pode ser provada ou demonstrada. É considerado como um consenso inicial suficientemente elementar para a construção de uma teoria.

Uma **hipótese** é um enunciado com status de formulação provisória, com intenções de ser posteriormente demonstrado ou refutado.

Uma **definição** é um enunciado que explica o significado de um termo (uma palavra, uma ideia abstrata ou um conjunto de símbolos). Portanto, uma definição não pode ser classificada como verdadeira ou falsa.

# 3 Definições

As definições matemáticas são de fundamental importância na estrutura axiomática que caracteriza a Matemática, e possuem um papel importante, uma vez que servem como pontos de partida para as demonstrações de teoremas. Van Dormolen e Zaslavsky, em [2], listam uma série de critérios que uma definição deve satisfazer para ser considerada adequada. Dentre eles, podemos citar:

- O **critério de hierarquia**, no qual um conceito novo pode descrever um caso especial de um conceito mais geral. Por exemplo, a definição de quadrado isola um tipo especial de quadrilátero.

- O **critério de existência** ou **boa definição**, no qual deve-se garantir a existência de pelo menos um exemplo do conceito que está sendo definido. Por exemplo, considere a seguinte "definição":

  **Definição 3.** *Um circunlátero é um quadrilátero em que todos os seus pontos são equidistantes de um ponto fixado.*

  Claramente, não existe nenhum exemplo de tal quadrilátero (uma vez que todos os seus pontos estariam sobre um círculo de centro no ponto fixado). Portanto, para qualquer classe *bem definida* de objetos, devemos mostrar, de alguma forma, a existência de pelo menos um objeto pertencente a tal classe. Por exemplo, o primeiro teorema apresentado nos livros de Euclides foi a construção de um triângulo isósceles. Apesar de ele ter definido este conceito anteriormente, foi necessário provar a existência de pelo menos um triângulo isósceles (daí a necessidade da apresentação da construção), a fim de que a definição tivesse sentido.

- O **critério de equivalência**, que estabelece que, no caso de um mesmo conceito ter diferentes definições, deve-se demonstrar que essas definições são equivalentes. Por exemplo, considere as seguintes formulações do conceito de paralelogramo:

  **Definição 4.** *Um paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.*

[1] Aristóteles, nascido em Estagira em 384 a.C. e falecido em Atenas, em 322 a.C., foi um filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande. Seus escritos abrangem diversos assuntos, como a física, a metafísica, as leis da poesia e do drama, a música, a lógica, a retórica, o governo, a ética, a biologia e a zoologia. Juntamente com Platão e Sócrates (professor de Platão), Aristóteles é tido como um dos fundadores da filosofia ocidental. (Fonte: Wikipedia.)

**Definição 5.** *Um paralelogramo é um quadrilátero no qual os lados opostos são iguais.*

**Definição 6.** *Um paralelogramo é um quadrilátero no qual um par de lados opostos são iguais e paralelos.*

**Definição 7.** *Um paralelogramo é um quadrilátero que é simétrico em relação a um ponto.*

Pode-se escolher qualquer uma dessas formulações como definição de um paralelogramo. Entretanto, se utilizarmos duas delas em um mesmo contexto, então temos de estabelecer a equivalência entre ambas, a fim de garantir que as duas definições são consistentes uma com a outra. O estabelecimento de tal equivalência nada mais é do que um teorema a ser demonstrado.

# 4 Teoremas

Um **teorema** é uma afirmação que foi *demonstrada* a partir de resultados previamente estabelecidos (como outros teoremas) e afirmações aceitas *a priori* (os axiomas), com o auxílio de regras de inferência permitidas.

A **demonstração** (também chamada **prova**) de um teorema pode ser vista como a justificativa da validade de seu enunciado. Assim, uma prova de um teorema nada mais é do que uma *explicação coerente* da validade do mesmo. É importante destacar que o teorema é um conceito fundamentalmente **dedutivo**.

Na posição diametralmente oposta, temos as lei das diversas ciências naturais, as quais são **experimentais**, isto é, são uma maneira de sintetizar os resultados de vários experimentos ou observações, relativos a uma mesma situação. Por exemplo, uma lei da Física Newtoniana[2] diz que a cada corpo corresponde uma *massa*, a qual é *constante*.

Contrariamente a um teorema, que permanece verdadeiro através dos séculos e em qualquer ponto do Universo (contanto que seja deduzido a partir dos mesmos axiomas, definições e teoremas anteriores, e utilizando as mesmas regras de inferência), uma lei experimental pode necessitar de correção, ou mesmo ser abandonada, se se perceber que ela contradiz algum experimento. Assim é que, por exemplo, a lei de constância da massa (na Física Newtoniana) foi reformulada com o advento da Teoria da Relatividade Especial de A. Einstein, quando a massa $m$ de um corpo passou a ser calculada, em função de sua velocidade $v$, pela expressão

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

onde $c$ é a velocidade da luz no vácuo e $m_0$ é a *massa de repouso* do corpo[3]

[2] Isaac Newton, físico e matemático inglês dos séculos XVII e XVIII, considerado um dos pais da Física moderna.

[3] Para o leitor interessado em saber mais sobre esse ponto, sugerimos a referência [3].

Para deixarmos a discussão menos abstrata, e fazer o leitor perceber a dinâmica envolvida numa demonstração, observe o enunciado do famoso Teorema de Pitágoras, acompanhado de uma prova do mesmo.

**Teorema 8** (Teorema de Pitágoras)**.** *Seja $ABC$ um triângulo retângulo em $C$. Então,*

$$AB^2 = BC^2 + CA^2.$$

**Demonstração.** Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ as medidas dos lados do triângulo $ABC$, retângulo em $C$. Construa um quadrado $PQRS$, de lado $a + b$, e considere pontos sobre os lados deste quadrado, de modo que $PX = QY = RZ = SW = a$ como ilustrado na figura (1).

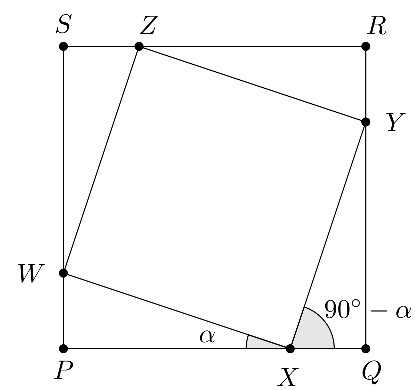


Figura 1: demonstração do Teorema de Pitágoras.

Dessa forma, os triângulos $PXW$, $QYX$, $RZY$ e $SWZ$ são todos congruentes ao triângulo $ABC$; portanto, os lados do quadrilátero $XYZW$ são iguais a $c$. Além disso, a soma dos ângulos $\angle WXP$ e $\angle YXQ$ é igual a 90°, de sorte que $W\widehat{X}Y = 90°$. De modo análogo, podemos concluir que os demais ângulos do quadrilátero $XYZW$ são todos retos. Logo, $XYZW$ é um quadrado.

Agora, observe que a área do quadrado $PQRS$ é igual à soma da área do quadrado $XYZW$ com as áreas dos triângulos $PXW$, $QYX$, $RZY$ e $SWZ$. Isso fornece a seguinte relação:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Substituindo $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ e cancelando a parcela $2ab$ em ambos os membros, chegamos a $c^2 = a^2 + b^2$, que é justamente a expressão do enunciado. □

Observe que, ao demonstrarmos o Teorema de Pitágoras, utilizamos:

- casos de congruência de triângulos (o caso LAL);
- o fato de a soma dos ângulos de um triângulo ser igual a 180°;

- a definição de quadrado;
- o fato da área de triângulo ser igual à metade do produto da base pela altura.

Numa exposição sistemática da Geometria Euclidiana, tais fatos já deveriam ter sido demonstrados ou apresentados (como definições), a fim de que o Teorema de Pitágoras possa aparecer de maneira coerente, como decorrência de fatos anteriores.

Outro aspecto interessante dos teoremas é que demonstrá-los não é mero preciosismo. Alguém poderia pensar que bastaria desenhar um triângulo retângulo, calcular as medidas de seus lados com o auxílio de uma régua e, em seguida, verificar a validade da fórmula do teorema. Há vários problemas com essa atitude. Por exemplo, assim fazendo, terá sido escolhido um triângulo *particular*, o que não garante que a mesma relação valha para os comprimentos dos lados de outro triângulo retângulo, distinto do escolhido. Há também erros de medição no cálculo (aproximado), com a régua, dos comprimentos dos lados do triângulo escolhido. O exemplo a seguir ilustra bem essas situações.

**Exemplo 9.** *A expressão* $x^2 + x + 41$ *é igual a um número primo quando substituímos* $x$ *por* $1, 2, 3, \ldots, 20$. *Ao constatar esse fato, um leitor mais otimista poderia pensar estar diante de um teorema:* $x^2 + x + 41$ é primo, para todo natural $x$. *Contudo, sem uma demonstração desse fato, não há como garantir que o resultado enunciado seja, realmente, sempre verdadeiro. De fato, ele não o é: para* $x = 41$, *temos*

$$x^2 + x + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43,$$

*um número composto*[4].

## 5 Sugestões ao Professor

É importante que o professor perceba a importância de uma boa definição para a compreensão das teorias por parte dos alunos. Alguns professores assumem (de maneira equivocada) que, ao não apresentarem definições bem formuladas de forma explícita, estão ajudando os seus estudantes. Porém, trata-se do extremo oposto. Definições bem formuladas ajudam a evitar conflitos cognitivos desnecessários (ver, por exemplo, [4]). Portanto, espera-se que o professor de Matemática sempre dedique um tempo às definições pertinentes, ao apresentar qualquer nova teoria.

Caso deseje aprender mais sobre a Lógica Proposicional de Aristóteles, recomendamos o site `https://plato.stanford.edu/entries/aristotle-mathematics/#2`

[4] É possível provar (veja [1], por exemplo) que não existe polinômio $f(x)$, de coeficientes inteiros, tal que $f(n)$ seja primo para todo $n$ natural.

## 6 Bibliografia

[1] A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar 6: Polinômios.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

[2] J. Van Dormolen e O. Zaslavsky. *The many facets of a definition: the case of periodicity.* J. Math. Behaviour 22 (2003), 91-106.

[3] R. Gazinelli. *Teoria da Relatividade Especial.* Edgard Blücher, São Paulo, 2009.

[4] S. Vinner. *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics*, cap. 5, páginas 65-81. Springer Verlag, Amsterdã, 1991.