

**Material Teórico - Módulo de PROBLEMAS
DOS CÍRCULOS MATEMÁTICOS -
CAPÍTULOS 2 E 3**

Problemas dos Capítulos 2 e 3 - Parte II

Problemas Resolvidos

Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha

12 de Setembro de 2021

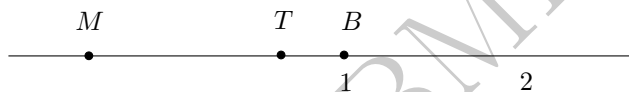


**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

1 Problemas do Capítulo 2

Exercício 1. *Um ônibus, um caminhão e uma motocicleta passam por um observador parado, em intervalos iguais. Eles também passam por um outro observador adiante, nos mesmos intervalos de tempo iguais, mas em ordem diferente: ônibus, moto e caminhão. As velocidades da moto e do caminhão são, respectivamente, 60 km/h e 30 km/h. Qual a velocidade do ônibus?*

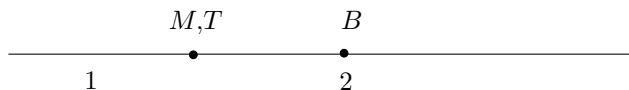
Primeira solução. A velocidade da moto é o dobro da velocidade do caminhão. Desenhemos um diagrama que mostra as posições dos veículos quando o ônibus, denotado por B , passa pelo primeiro observador:



Vamos supor que o caminhão, denotado por T , estava a x km do primeiro observador naquele instante. Naquele momento, a moto, denotada por M , estava a $4x$ km do primeiro observador: de fato, quando o caminhão percorre os x km até o primeiro observador, a moto terá percorrido $2x$ km e ainda terá que viajar durante o mesmo intervalo de tempo até alcançar o primeiro observador; ao fazer isso, percorrerá mais $2x$ km.

Mais ainda, também podemos concluir que os intervalos de tempo entre os veículos vistos pelos observadores correspondem ao tempo que a moto leva para percorrer $2x$ km.

Agora desenhe as posições dos veículos quando o ônibus passa pelo segundo observador:



Naquele momento, a moto estava a uma distância de $2x$ km do segundo observador, o que significa que, naquele

instante, a moto e o caminhão estavam juntos, já que leva o dobro do tempo para o caminhão percorrer esta distância. Vimos que este ponto onde a moto alcança o caminhão está $2x$ km depois do primeiro observador, de modo que o caminhão percorreu $3x$ km antes deles se encontrarem e a moto percorreu $6x$ km. Então a distância entre os observadores é de $4x$ km e o ônibus percorre essa distância no mesmo tempo que o caminhão que, a uma velocidade de 30 km/h, percorre $3x$ km. Logo a velocidade do ônibus é 40 km/h. $\square$

Segunda solução. Seja t o intervalo de tempo comum entre os instantes em que os veículos passam pelos observadores. A moto passa pelo primeiro observador t horas depois do caminhão e passa pelo segundo observador t horas antes do caminhão. Portanto, a moto percorre a distância entre os dois observadores $2t$ horas mais rápido do que o caminhão. A moto está viajando duas vezes mais rápido do que o caminhão, de modo que percorre a distância entre os observadores na metade do tempo. Então, o caminhão tem que levar $4t$ horas para percorrer a distância entre os dois observadores. O ônibus passa pelo primeiro observador t horas antes do caminhão e passa pelo segundo observador $2t$ horas antes do caminhão. O caminhão demora $4t$ horas para percorrer a distância entre os observadores e o ônibus leva $3t$ horas para percorrer a mesma distância. Consequentemente, o ônibus está viajando a $\frac{4}{3}$ da velocidade do caminhão, ou 40 km/h. $\square$

Exercício 2. *Sejam m e n , respectivamente, as quantidades de algarismos dos números 2^{2002} e 5^{2002} . Quanto vale $m + n$?*

Solução. Vamos denotar o número de algarismos em 2^{2002} por m e o número de algarismos em 5^{2002} por n . Queremos encontrar $n + m$. Se multiplicarmos os dois números, obteremos 10^{2002} , que tem 2003 algarismos. Isso é útil porque, para qualquer inteiro positivo k , 10^k é o menor número com $k + 1$ algarismos.

Como n é o número de algarismos em 5^{2002} , temos $10^{n-1} < 5^{2002} < 10^n$. Usamos o fato de que 10^n tem um alga-

rismo a mais do que 5^{2002} , logo, é maior. Analogamente, $10^{m-1} < 2^{2002} < 10^m$. Multiplicando as desigualdades acima, obtemos

$$10^{m+n-2} < 5^{2002} < 10^{m+n},$$

de modo que $m + n - 2 < 2002 < m + n$. Portanto, $m + n = 2003$ e estão escritos 2003 algarismos na página. $\square$

2 Problemas do Capítulo 3

Exercício 3. *Na primeira casa de um tabuleiro 1×13 está uma moeda. Tiago e Maria movem a moeda alternadamente. Em cada turno é permitido avançar 1,2,3,4 ou 5 casas. Quem colocar a moeda na última casa é o vencedor. Se Maria começar jogando, ela pode ter certeza da vitória?*

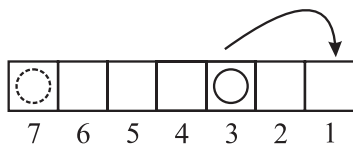
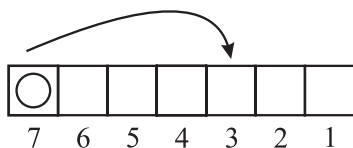
Para resolver esse problema, iremos utilizar os conceitos de posições vencedoras e perdedoras, os quais podem ser descritos como segue:

Posição vencedora: A partir dela, *podemos escolher um movimento* e repassar uma posição perdedora para o adversário.

Posição perdedora: A partir dela, é impossível escolher um movimento e repassar uma posição perdedora para o adversário. Ou seja, *não importa o movimento escolhido*, o adversário irá receber uma posição vencedora.

Solução. Como em muitos problemas de olimpíadas, comecemos analisando alguns casos pequenos, a fim de perceber algum padrão de argumentação. Vamos supor que em vez de 13 casas o tabuleiro tivesse apenas quatro. Neste caso, fica fácil ver que quem começa ganha basta avançar três casas.

O mesmo iria ocorrer se o tabuleiro tivesse 2,3,4,5 ou 6 casas. Porém, em um tabuleiro 7×1 , o primeiro jogador perde. Veja que após a primeira jogada a moeda estará em uma das casas 2,3,4,5 ou 6. E já sabemos que essas casas levam o jogador à vitória.



Desse modo, vamos dizer que 7 é uma posição perdedora e 6,5,4,3 e 2 são posições vencedoras. Assim, se um o jogador estiver em uma das casas 8,9,10,11 ou 12, ele pode garantir a vitória movendo a moeda para a casa 7, deixando o seu adversário em uma posição perdedora. Com isso, podemos afirmar que as posições 8,9,10,11 e 12 também são vencedoras.

Resta analisar a 13ª casa. Observe que a partir desta casa podemos mover a moeda apenas para uma das casas 8,9,10,11 ou 12, as quais são vencedoras. Daí, quem começar perderá, pelo simples fato de iniciar em uma posição perdedora. $\square$

Exercício 4. Cada uma das letras *D*, *O*, *I* e *S* representa um algarismo diferente na multiplicação a seguir. Encontre quais podem ser os valores de cada letra.

$$\begin{array}{r}
 D O I S \\
 \times D O I S \\
 \hline
 * * * * D \\
 * * * * O \\
 * * * * I \\
 * * * * S \\
 \hline
 * * * * * * * *
 \end{array}$$

Solução. Observe que S^2 termina em D e que $S \times D$ termina em S . Logo, S^3 termina em S . Analisando os cubos de todos os algarismos, temos que:

$$\begin{array}{cccccc} 0^3 = 0 & 1^3 = 1 & 2^3 = 8 & 3^3 = 27 & 4^3 = 64 \\ 5^3 = 125 & 6^3 = 216 & 7^3 = 343 & 8^3 = 512 & 9^3 = 729 \end{array}$$

Pela tabela acima, S tem que ser 4 ou 9 (os casos 0,1,5,6 estão excluídos porque levam a $D = S$). Mas o 9 também está excluído, pois levaria a $D = 1$, de forma que a última linha antes do resultado final teria apenas 4 algarismos, em vez de 5. Então, $S = 4$ e $D = 6$.

Como S é par, ambos I e O têm de ser pares (pois O é o algarismo das unidades do produto $S \times I$ e I é o algarismo das unidades de $S \times O$). Além disso, não podem ser iguais a 0 (pois se um deles fosse igual a zero, o outro também o seria). Portanto, ou $O = 2$ e $I = 8$, ou vice-versa.

Por fim, é fácil ver que ambos os casos funcionam, de modo que o número é 6284 ou 6824.

□

3 Problemas extras

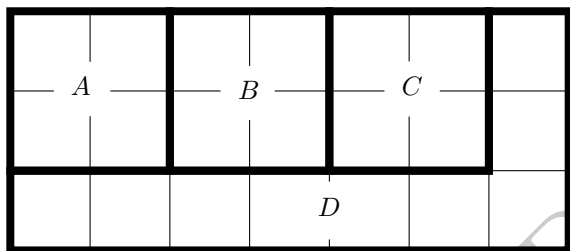
Exercício 5. *No interior de uma garrafa de vidro fechada irregular há certa quantidade de líquido. É possível determinar se o volume ocupado por esse líquido é mais do que metade do volume total da garrafa mesmo sem abri-la?*

Solução. Sim, é possível determinar. Coloque a garrafa em qualquer posição e marque o nível do líquido. Vire-a de ponta-cabeça e veja se a nova altura do líquido ultrapassa a marca. Se a resposta for positiva, então o líquido ocupará mais do que metade do volume da garrafa.

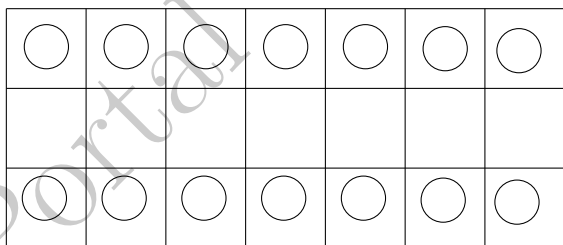
□

Exercício 6. *Qual é a menor quantidade de moedas que devemos colocar nas casas de um tabuleiro 3×7 de modo que seja sempre possível encontrar um subtabuleiro 2×2 com pelo menos três moedas?*

Solução. A resposta é 15. Separe o tabuleiro em quatro regiões A, B, C e D conforme ilustrado a seguir:



Note que pode haver no máximo 2 moedas em cada uma das regiões A, B e C. Além disso, não podemos ter mais do que 8 moedas na região D. Caso contrário, o sub-tabuleiro 2×2 inferior direito teria pelo menos três moedas. Portanto, se colocarmos pelo menos $2 + 2 + 2 + 8 + 1 = 15$ moedas, sempre será possível encontrar um subtabuleiro 2×2 com pelo menos três moedas. O exemplo a seguir, mostra uma situação na qual temos 14 moedas e nenhum subtabuleiro 2×2 com pelo menos três moedas.



□

Exercício 7. O número 9999 está escrito em um quadro. É possível acrescentar outros quatro algarismos à direita deste número e formar um número de oito dígitos que seja um quadrado perfeito?

Solução. Não. Note que qualquer número que pode ser formado estará necessariamente entre $10.000^2 = 100.000.000$ e

$9.999^2 = 99.980.001$ que são dois quadrados perfeitos consecutivos. $\square$

Exercício 8. *Os alunos de uma escola formaram um círculo. Jonas e Amanda, que não estavam no círculo, resolveram contar os alunos do círculo, mas cada um iniciando por um aluno diferente, apesar de seguirem no mesmo sentido. Marcos foi o número 37 na contagem de Jonas e o número 15 na de Amanda. Nair foi a número 3 na contagem de Jonas e número 201 na de Amanda. Quantos alunos a escola possui?*

Solução. A contagem de Jonas e Amanda foi no mesmo sentido e eles contaram a mesma quantidade de alunos no círculo. De Marcos até Nair, pela contagem de Amanda, são $201 - 14 = 187$ alunos. Esse resultado deve ser o mesmo na contagem de Jonas. Como Nair foi a número 3 na contagem de Jonas, significa que Jonas contou até o último aluno do círculo e recomeçou a contagem contando mais 3. Se ele partiu do 37, então devemos subtrair 36 do total de alunos do círculo e depois somar 3, de forma que o resultado seja 187, ou seja, o total de alunos do círculo é $187 + 36 - 3 = 220$. Não podemos esquecer que Jonas e Amanda também são alunos da escola, mas não estavam no círculo. Portanto, o total de alunos da escola é $220 + 2 = 222$. $\square$

Exercício 9. *Em um tabuleiro 8×8 , uma torre está na casa a1. Dois jogadores movem a torre com objetivo de colocar a torre na casa h8. Sabendo que a torre pode mover-se apenas para cima ou para direita (quantas casas o jogador desejar) e que os jogadores não podem passar a vez, explique, com justificativa, qual jogador tem a estratégia vencedora.*

Solução. Primeiramente, note que todas as casas da última linha e da última coluna (exceto a h8) são vencedoras, pois, a partir delas *podemos escolher* um movimento que nos leve à vitória. Com, isso a casa g7 se torna perdedora, pois, a partir dela *qualquer movimento* leva o outro jogador a uma posição vencedora (veja a figura 1).

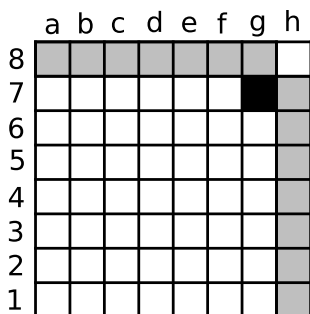


Figura 1

Agora, como $g7$ é perdedora, as demais casas da sétima linha e da sétima coluna são vencedoras. Mais ainda, a casa $f6$ também deve ser perdedora (figura 2).

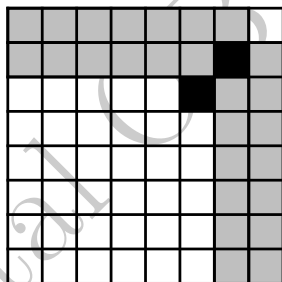


Figura 2

Continuando de maneira análoga, obtemos que a casa $a1$ é perdedora (figura 3). Logo, quem começar, perde.

□

4 Sugestões aos Professores

Ao professor que deseja criar um círculo matemático em sua escola, recomendamos, além do livro [1], os livros [2] e [3]. Nestas obras, o professor poderá encontrar problemas

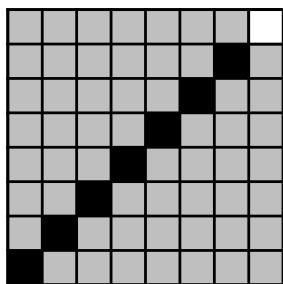


Figura 3

separados em conjuntos que tratam de um mesmo tema.

É importante que o professor entenda que a dinâmica de um encontro em um círculo matemático é diferente daquela que comumente encontra-se nas aulas ordinárias da escola. Em primeiro lugar, deve-se dar um tempo maior para que os alunos pensem em suas próprias soluções para os exercícios. Além disso, os alunos devem ser convidados a exporem suas ideias (mesmo que parcialmente incompletas ou inconsistentes) aos colegas. A ideia é transformar a solução de um problema em um debate construtivo em que mais de uma pessoa possa colaborar para que a turma encontre uma solução adequada.

Observe que muitas das situações apresentadas nesta lista possuem diversas soluções ou podem ser modificadas para gerar novas formas de explorar as ideias utilizadas nas soluções. Recomendamos que os professores utilizem essa estratégia para manter a turma motivada ao longo da aula.

Sugestões de Leitura Complementar

1. S. Dorichenko. *Um Círculo Matemático de Moscou: Problemas semana-a-semana*. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
2. D. Fomin, I. Itenberg e S. Genkin. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*. IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

3. B. Holanda e E. Chagas. *Círculos de Matemática da OBMEP, Volume 1: Primeiros passos em Álgebra, Aritmética e Combinatória* IMPA, Rio de Janeiro, 2018.

Portal OBMEP