Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Leis do Limite - Parte 2

Várias Técnicas

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

14 de Abril de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Encerraremos esse módulo apresentando mais alguns cálculos de limites.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = 2$$

e

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = 1.$$

Encontre $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Solução. As identidades

$$f = \frac{(f+g) + (f-g)}{2}$$

e

$$g = \frac{(f+g) - (f-g)}{2},$$

juntamente com as regras aritméticas para limites, dão

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] + \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]}{2} = \frac{3}{2}$$

e

$$\lim_{x\to a} g(x) = \frac{\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] - \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

□

Exemplo 2. *Determine os números reais a e b sabendo que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1.$$

Solução. Estamos, tacitamente, admitindo que a expressão $\sqrt{ax+b}$ faz sentido para todo $x \neq 0$ suficientemente próximo de 0, ou, equivalentemente, que $ax+b \geq 0$ para cada $x \neq 0$ suficientemente próximo de 0. Daí, é fácil inferir que $b > 0$.

Agora, como

$$\sqrt{b}-2 = \lim_{x\to 0} \sqrt{ax+b}-2 = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 0 \cdot 1 = 0,$$

vemos que $b = 4$. Então, para os valores de x admissíveis, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} &= \frac{\sqrt{ax+4}-2}{x} \\
&= \frac{\sqrt{ax+4}-2}{x} \times \frac{\sqrt{ax+4}+2}{\sqrt{ax+4}+2} \\
&= \frac{(ax+\cancel{4})-\cancel{4}}{x(\sqrt{ax+4}+2)} \\
&= \frac{a\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{ax+4}+2} \\
&= \frac{a}{\sqrt{ax+4}+2},
\end{aligned}$$

de forma que

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} = \frac{a}{4}.$$

Segue que $a = 4$. □

Exemplo 3. *Para cada número real positivo a, considere o triângulo $T_a = OP_aQ_a$, sendo O a origem do sistema de coordenadas e P_a, Q_a pontos dos eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente, de tal modo que a reta $\overleftrightarrow{P_aQ_a}$ seja tangente ao gráfico da hipérbole $YX = 1$ no ponto $(a,1/a)$. Prove que a área de T_a independe de a.*

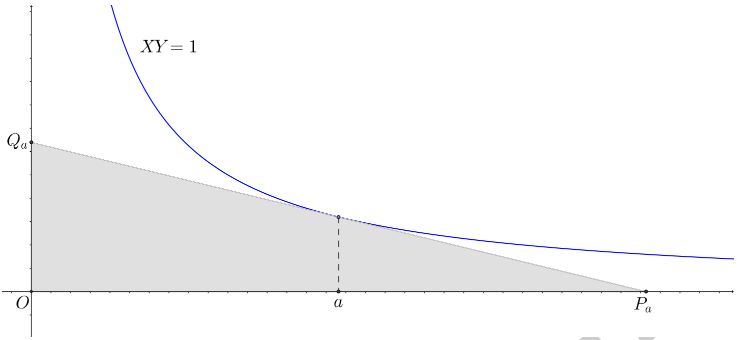

Figura 1: a área do triângulo hachurado T_a independe de a.

Solução. Definindo $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ por $f(x) = 1/x$, a inclinação $m_f(a)$ [1] da reta tangente $\overleftrightarrow{P_aQ_a}$ ao gráfico de f no ponto de abscissa a calcula-se como

$$\begin{aligned} m_f(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{ax}}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} -\frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Assim, uma equação da reta tangente $\overleftrightarrow{P_aQ_a}$ é

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a).$$

Fazendo, sucessivamente, $y = 0$ e $x = 0$ na equação acima, obtemos as coordenadas dos pontos P_a e Q_a, quais sejam, $P_a = (2a,0)$ e $Q_a = (0,2/a)$. Por fim, como o triângulo T_a é retângulo em O, concluímos que sua área vale $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2$, valor que independe do ponto a. $\square$

[1] Veja a aula *O Problema da Tangente* do módulo de Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 1.

Observação 4. *A partir do cálculo das coordenadas dos pontos P_a e Q_a, o leitor deve ter percebido que $(a,1/a)$, o ponto de contato da tangente com a hipérbole, é o ponto médio do segmento P_aQ_a.*

Na aula *Teorema do Sanduíche* desse módulo, estabelecemos o seguinte resultado (vide exemplo 2): *se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética não contante de números naturais (portanto, crescente) e $p(n)$ é o número de termos a_m que são menores que ou iguais a n, então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=\frac{1}{r},$$

em que r é a razão da PA.

Precisaremos desse resultado no próximo

Exemplo 5. *O conjunto dos números naturais é particionado em m progressões aritméticas infinitas e não constantes, de razões $d_1,d_2,\ldots,d_m$. Prove que*

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_m}=1.$$

Solução. Para cada $j=1,2,\ldots,m$, seja $p_j(n)$ o número de termos da PA de razão d_j que são menores que ou iguais a n. Como cada número natural é termo de exatamente uma das progressões aritméticas (pois isso é o que significa dizer que as m progressões aritméticas *particionam* o conjunto dos naturais), vale

$$p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_m(n)=n,$$

ou seja,

$$\frac{p_1(n)}{n}+\frac{p_2(n)}{n}+\cdots+\frac{p_m(n)}{n}=1. \tag{1}$$

Pelo resultado citado acima, $\lim_{n\to\infty}\frac{p_j(n)}{n}=\frac{1}{d_j}$, para cada $1\le j\le m$. Logo, fazendo $n\to\infty$ em (1), obtemos

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_m}=1,$$

como desejado. □

Na seção 2.1 da aula anterior (*Limites Laterais*), construímos a função exponencial e estabelecemos suas principais propriedades. Nos próximos módulos, estudaremos as inversas das exponenciais, a saber, as *funções logarítmicas*, sob o ponto de vista das noções pertinentes ao Cálculo.

Todavia, já temos um conhecimento prévio dessas funções. Por exemplo, na aula *Função logarítmica e propriedades - parte 3*, do módulo de Função Logarítmica, encontramos uma abordagem geométrica da função *logaritmo natural*, ln: *para cada número real positivo x, $\ln x$ é a área (orientada) do "trapézio curvilíneo" de vértices $(1{,}0), (x{,}0), (x{,}1/x)$ e $(1{,}1)$, sendo o lado curvado o arco correspondente da hipérbole $xy = 1$.*

Aliás, o exemplo 11 da última aula daquele módulo explora esse ponto de vista para obter a desigualdade

$$\ln(1 + x) \leq x, \tag{2}$$

válida para cada $x > -1$. Utilizaremos esse fato para tratar de um importante limite.

Exemplo 6. *Calcule*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

Solução. Substituindo x por $-\frac{u}{1+u}$ em (2), vem

$$\ln\left(1 - \frac{u}{1 + u}\right) \leq -\frac{u}{1 + u},$$

ou ainda,

$$\ln\left(\frac{1}{1 + u}\right) \leq -\frac{u}{1 + u}. \tag{3}$$

A condição sobre u que torna as duas últimas desigualdades válidas é obtida resolvendo-se a inequação $-\frac{u}{1+u} > -1$, ou seja, $u > -1$. Por outro lado, lembrando que *o logaritmo do inverso é o oposto do logaritmo*, podemos reescrever a desigualdade (3) como

$$-\frac{u}{1 + u} \geq -\ln(1 + u)$$

para cada $u > -1$, o que dá

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x), \tag{4}$$

para todo $x > -1$ (retornamos à variável x). Logo, por (2) e (4), temos

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \tag{5}$$

qualquer que seja o número real $x > -1$.

Portanto, se $-1 < x < 0$, a divisão de cada membro da desigualdade (5) por x retorna

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1.$$

Ora, as relações $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+x} = 1 = \lim_{x\to 0^-} 1$ garantem, via o teorema do confronto, a existência de $\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x}$ bem como a igualdade

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{6}$$

Por outro lado, se $x > 0$, a desigualdade (5) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1,$$

e um argumento análogo nos assegura de que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{7}$$

Das igualdades (6) e (7) segue que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. $\square$

Exemplo 7. *Considere, no plano, um sistema cartesiano de coordenadas de origem O. Para cada ponto $P \neq O$ sobre a parábola $y = x^2$, seja Q o ponto no qual a medatriz de OP corta o eixo das ordenadas. À medida que P tende à origem O ao longo da parábola, o que acontece com Q? Ele tem uma posição-limite? Se tiver, encontre-a.*

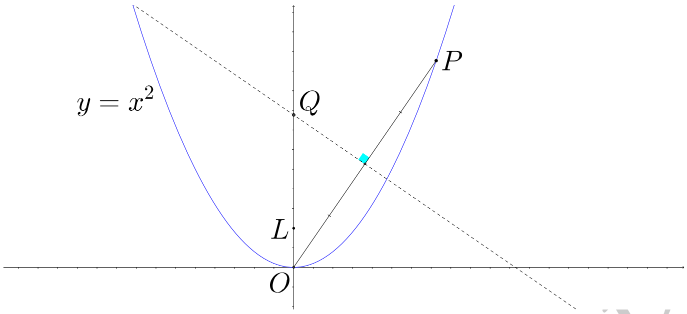

Figura 2: exemplo 7.

Solução. Um ponto arbitrário $P \neq O$ na parábola $y = x^2$ pode ser escrito na forma $P = (a,a^2)$, com $a \neq 0$. Devemos, pois, determinar a equação da mediatriz m do segmento OP.

Ora, m passa pelo ponto médio M de OP, sendo

$$M = \left(\frac{0+a}{2},\frac{0+a^2}{2}\right) = \left(\frac{a}{2},\frac{a^2}{2}\right),$$

enquanto a inclinação de m é o oposto do inverso da inclinação da reta $\overleftrightarrow{OP}$, qual seja,

$$-\frac{1}{\frac{a^2-0}{a-0}} = -\frac{1}{a}.$$

Portanto, uma equação para a reta m é

$$y - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Fazendo $x = 0$ na equação acima, encontramos a ordenada y_Q do ponto Q:

$$y_Q - \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{a}\left(0 - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow y_Q = \frac{1+a^2}{2}.$$

Como $\lim_{a\to 0} \frac{1+a^2}{2} = \frac{1}{2}$, concluímos que $Q = (0,\frac{1+a^2}{2})$ tende ao ponto $L := (0,\frac{1}{2})$ quando P tende à origem (isto é, quando $a \to 0$). $\square$

Observação 8. *O ponto limite $L = (0{,}1/2)$ do problema anterior pode ser expresso em termos da parábola: se V e F são o vértice e o foco da parábola, então L é o simétrico de V com respeito a F (ou seja, F é o ponto médio do segmento VL).*

Exemplo 9. *Considere as circunferências*

$$C : (x-1)^2 + y^2 = 1, \quad C_r : x^2 + y^2 = r^2, 0 < r < 2,$$

e os pontos A_r, B_r do semiplano superior, em que $A_r \in C_r \cap OY$ [2] *e $B_r \in C \cap C_r$.*

Se a reta $\overleftrightarrow{A_rB_r}$ corta o eixo das abscissas no ponto P_r, determine a posição-limite de P_r quando $r \to 0^+$.

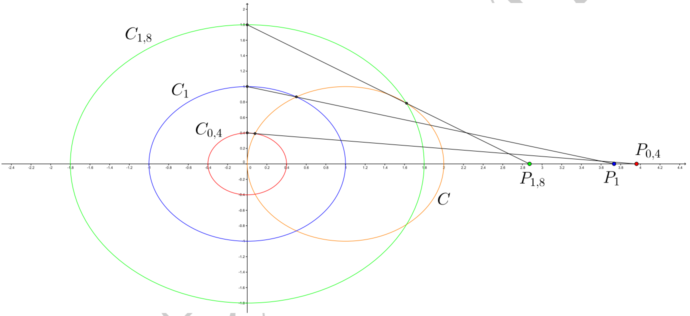

Figura 3: exemplo 9.

Solução. Observe que $A_r = (0{,}r)$, enquanto B_r é o par ordenado, de 2ª coordenada positiva, que é solução do sistema de equações

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = & 1 \\ \quad x^2 + y^2 & = r^2. \end{cases}$$

Subtraindo a 1ª equação da 2ª, chegamos à relação $2x - 1 = r^2 - 1$, ou seja, $x = r^2/2$. Daí, mais um pouco de álgebra elementar permite obter a igualdade $B_r = \left(\frac{r^2}{2}, \frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}\right)$.

[2] OY é o eixo das ordenadas.

De posse das coordenadas dos pontos A_r e B_r, calculemos a inclinação da reta $\overleftrightarrow{A_rB_r}$:

$$\frac{\frac{r\sqrt{4-r^2}}{2}-r}{\frac{r^2}{2}-0}=\frac{\sqrt{4-r^2}-2}{r}.$$

Assim, uma equação da reta $\overleftrightarrow{A_rB_r}$ é:

$$y-r=\frac{\sqrt{4-r^2}-2}{r}\cdot x.$$

A abscissa x do ponto P_r é a solução da equação obtida fazendo-se $y=0$ na igualdade anterior, de forma que $P_r=\left(\frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}},0\right)$. Agora precisamos calcular $\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}}$. Ora,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}}&=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2}{2-\sqrt{4-r^2}}\times\frac{2+\sqrt{4-r^2}}{2+\sqrt{4-r^2}}\\&=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2(2+\sqrt{4-r^2})}{\cancel{4}-(\cancel{4}-r^2)}\\&=\lim_{r\to 0^+}\frac{\cancel{r^2}(2+\sqrt{4-r^2})}{\cancel{r^2}}\\&=\lim_{r\to 0^+}(2+\sqrt{4-r^2})=4.\end{aligned}$$

Portanto, quando $r\to 0^+$, P_r tende ao ponto (4,0). $\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos fortemente que as soluções dos exemplos apresentados sejam tratadas em detalhe. Além disso, antes de iniciar as resoluções dos exemplos, procure destacar as principais ideias envolvidas nos argumentos. Vale a pena incentivar os alunos a escreverem as suas próprias soluções, fornecendo, sempre que conveniente, sugestões-chave aos problemas. Mais exemplos podem ser encontrados nas referências.

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.