Material Teórico - Determinantes como Áreas - Parte II

Transformações e Determinantes - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de Julho de 2022

Portal da Matemática
OBMEP

Nesta aula, apresentaremos a última propriedade fundamental do determinante: a *aditividade*. Mostraremos, ainda, como as três propriedades enunciadas caracterizam a *função determinante*. No meio do caminho, faremos um breve estudo das *coordenadas baricêntricas* (veja a referência [3] para aprofundamento). Como de praxe, na última seção aplicaremos a teoria na resolução de alguns problemas de geometria.

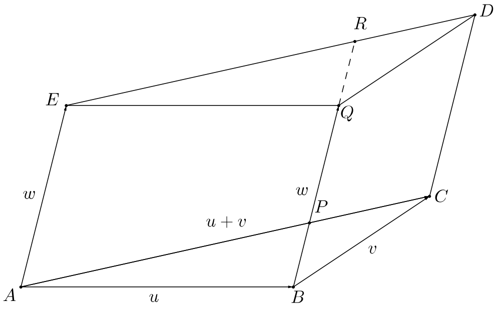
1 A aditividade do determinante

3ª Propriedade dos Determinantes (Aditividade):

$$\det[u+v,w] = \det[u,w] + \det[v,w], \tag{1}$$

para quaisquer vetores u,v e w.

A figura abaixo propõe uma justificativa geométrica da propriedade aditiva.



Nas configurações da figura acima, temos $\det[u,w] = \mathcal{A}(ABQE)$, $\det[v,w] = \mathcal{A}(BCDQ)$ e $\det[u+v,w] = \mathcal{A}(ACDE)$. Como os paralelogramos $ABQE$ e $APRE$ têm a mesma altura relativa à base comum AE, vem $\mathcal{A}(ABQE) = \mathcal{A}(APRE)$. De forma similar, vale $\mathcal{A}(BCDQ) = \mathcal{A}(PCDR)$. Por fim, como a soma das áreas de $APRE$ e $PCDR$ resulta na área de $ACDE$, concluímos que $\mathcal{A}(ACDE) = \mathcal{A}(ABQE) + \mathcal{A}(BCDQ)$, ou equivalentemente, $\det[u+v,w] = \det[u,w] + \det[v,w]$.

A demonstração algébrica da identidade (1) é imediata. De fato, se $u = (a,b), v = (c,d)$ e $w = (e,f)$, então

$$\begin{aligned}\det[u+v,w] &= \begin{vmatrix} a+c & e \\ b+d & f \end{vmatrix} \\ &= (a+c)f-(b+d)e \\ &= (af-be)+(cf-de) \\ &= \det[u,w]+\det[v,w].\end{aligned}$$

Do mesmo modo se mostra que $\det[u,v+w] = \det[u,v] + \det[u,w]$.

Observação 1. *Com essa 3ª propriedade do determinante, é fácil verificar as igualdades*

$$\det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \det[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}] = \det[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}]. \qquad (2)$$

Por exemplo, para provar a primeira delas, basta notar que $\det[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}] = \det[\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}]$, *sendo esse último determinante igual a* $\det[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}]+\det[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}]$, *pela propriedade aditiva. Agora, como* $\det[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}] = 0$ *e* $\det[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}] = -\det[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}] = \det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$, *segue a relação desejada.*

Já sabemos que os determinantes em (2) *possuem o mesmo valor absoluto, pois a metade de tais valores é a área do triângulo ABC. A coincidência dos sinais também ocorre porque as sequências ABC, BCA e CAB determinam o mesmo sentido de rotação no plano.*

Doravante, $[ABC]$ denotará a área orientada do triângulo ABC, qual seja, $[ABC] = \frac{1}{2}\det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$. De outra forma, $[ABC]$ é a área do triângulo ABC, com sinal positivo caso a sequência de vértices $A \to B \to C$ determine o sentido anti-horário[1], e negativo, caso o sentido $A \to B \to C$ seja horário.

[1] Ou seja, o sentido da menor rotação que transforma a semirreta $\overrightarrow{AB}$ na semirreta $\overrightarrow{AC}$ é o sentido anti-horário.

Exemplo 2. *Dados um triângulo ABC e um ponto P qualquer no plano, mostre que $[PAB] + [PBC] + [PCA] = [ABC]$.*

Solução. Sejam $u = \overrightarrow{PA}, v = \overrightarrow{PB}$ e $w = \overrightarrow{PC}$. Como $\overrightarrow{AB} = v - u$ e $\overrightarrow{AC} = w - u$, as propriedades do determinante dão

$$\begin{aligned} 2[ABC] &= \det[v - u, w - u] \\ &= \det[v,w] + \det[v, -u] + \det[-u,w] + \det[-u, -u] \\ &= \det[v,w] - \det[v,u] - \det[u,w] \\ &= \det[u,v] + \det[v,w] + \det[w,u] \\ &= 2([PAB] + [PBC] + [PCA]), \end{aligned}$$

como desejado. □

2 Coordenadas baricêntricas

Seja V o espaço dos vetores no plano. Nas notações da solução do exemplo acima, e levando em conta que $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ é uma *base* de V (veja a observação 13 - ii) da aula *Composição* do módulo *Operando com Transformações Lineares: Álgebra e Geometria* e a regra de Cramer na 1ª aula da 1ª parte desse módulo), se escrevermos $\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$, afirmamos que

$$\beta = [PCA]/[ABC] \tag{3}$$

e

$$\gamma = [PAB]/[ABC] \tag{4}$$

(compare com a regra de Cramer). Com efeito,

$$\begin{aligned} 2[PAB] &= \det[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}] \\ &= \det[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{AB}] \\ &= \det[-\beta \cdot \overrightarrow{AB} - \gamma \cdot \overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}] \\ &= -\gamma \det[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}] \\ &= \gamma(2[ABC]). \end{aligned}$$

Analogamente, temos $[PCA] = \beta[ABC]$.

Assim, fixado o triângulo ABC e definindo

$$\alpha = [PBC]/[ABC], \tag{5}$$

cada ponto P do plano determina, a partir das relações (3), (4), (5), uma única terna (α,β,γ) de números reais satisfazendo $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (vide exemplo (2)), e reciprocamente.

Os números α, β e γ são as *coordenadas baricêntricas* do ponto P relativamente ao triângulo ABC. Nesse caso, escrevemos

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C, \tag{6}$$

ou $P = (\alpha,\beta,\gamma)$, caso o triângulo de referência esteja fixado na discussão.

Para efeito de ilustração, os vértices A, B e C do triângulo referencial se expressam como $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ e $C = (0,0,1)$. Por outro lado, os pontos médios M, N e P dos lados BC, CA e AB, respectivamente, se escrevem na forma $M = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, $N = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$ e $P = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, também respectivamente (a ausência da parcela relativa a um vértice na expressão (6) indica que a coordenada baricêntrica respectiva é nula).

Observação 3. *Podemos verificar que, com respeito à relação (6), $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$ conforme P e A estejam do mesmo lado ou em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Por outro lado, $\alpha = 0$ significa $P \in \overleftrightarrow{BC}$. Valem observações análogas para as demais coordenadas baricêntricas β e γ.*

Portanto, os pontos interiores ao triângulo de referência ABC se caracterizam pela propriedade de possuírem todas as coordenadas baricêntricas positivas. Os pontos de fronteira, ou seja, os pontos da poligonal ABC, são precisamente aqueles que admitem alguma coordenada baricêntrica nula, sendo as demais não-negativas. Finalmente, o exterior do triângulo ABC é constituído pelos pontos que admitem alguma coordenada baricêntrica negativa.

Como já exposto acima, a igualdade $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$, em que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, é uma outra forma de expressar a relação vetorial $\overrightarrow{AP} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC}$. Por exemplo, Se G é o baricentro do triângulo ABC, de acordo com a solução do exemplo 18 da aula *Vetores no Plano - Parte I* do módulo *Geometria das Transformações Lineares*, vale $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$, de onde segue o

Exemplo 4. $G = \dfrac{1}{3}A + \dfrac{1}{3}B + \dfrac{1}{3}C$.

Mais geralmente, dados n pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ no plano e n números reais $k_1, k_2, \ldots, k_n$, satisfazendo $k_1+k_2+\cdots+k_n = 1$, a *combinação convexa* com os pontos $P_i's$ a coeficientes $k_i's$ representa o único ponto P do plano satisfazendo

$$\overrightarrow{P_1P} = k_2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + k_n \cdot \overrightarrow{P_1P_n}.$$

Nesse caso, escreveremos

$$P = k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots + k_nP_n.$$

Para efeito de ilustração, se O e H são o circuncentro e o ortocentro de um triângulo ABC, então $H = A+B+C-2O$ (vide exemplo 20 da aula *Vetores no Plano - Parte II* do módulo de *Geometria das Transformações Lineares*). Para mais um exemplo, se G é o baricentro do polígono $P_1P_2\ldots P_n$, então $G = \frac{1}{n}P_1 + \frac{1}{n}P_2 + \cdots + \frac{1}{n}P_n$ (generalização do exemplo anterior). Basta lembrar que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{GP_i} = 0$, o que nos dá $n \cdot \overrightarrow{P_1G} = \sum_{i=2}^{n} \overrightarrow{P_1P_i}$ ou, ainda, $\overrightarrow{P_1G} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_i}$.

Observação 5. *Fixado um ponto O no plano, é imediato que $P = k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots + k_nP_n$ equivale a $\overrightarrow{OP} = k_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \cdots + k_n \cdot \overrightarrow{OP_n}$. Em particular, se O é a origem de um sistema de eixos ortogonais, vemos que (numa notação óbvia) a combinação convexa $P = k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots + k_nP_n$ se traduz em coordenadas como um par de igualdades: $x_P = \sum_{i=1}^{n} k_i x_{P_i}$ e $y_P = \sum_{i=1}^{n} k_i y_{P_i}$. Assim, por exemplo, reobtemos o fato de que o baricentro de um polígono tem por coordenadas as médias aritméticas das coordenadas dos vértices do polígono.*

Se A e B são pontos distintos, uma combinação convexa $P = sA+tB$, com $s+t = 1$, é um ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$. De fato, $P = sA + tB \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, sendo essa última igualdade equivalente à afirmação de que A, B e P são colineares. Desse modo, como $s = 1 - t$, vemos que um ponto P do plano pertence à reta determinada por A e B se, e só se, $P = (1-t)A + tB, t \in \mathbb{R}^2$.

Por definição, $D = (1-t)B + tC \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} = t \cdot \overrightarrow{BC}$, sendo $\overrightarrow{DC} = (1-t)\cdot\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD} = \frac{t}{1-t}\cdot\overrightarrow{DC}$ outras formas equivalentes de se expressar essas igualdades. Portanto, obtemos a

Proposição 6.

i) Seja $D \neq C$ um ponto da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Então, D divide BC na razão k, no sentido que $\overrightarrow{BD} = k \cdot \overrightarrow{DC}$ [3], se, e somente se, k é a razão do coeficiente relativo ao ponto C pelo coeficiente relativo a B. Nesse caso, vale $D = \frac{1}{k+1}B + \frac{k}{k+1}C$.

ii) Para cada ponto D na reta $\overleftrightarrow{BC}$ vale $D = \frac{DC}{BC}B + \frac{BD}{BC}C$.

Observação 7. *Para $1 \leq i \leq n$, seja $P_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C$. Então, as igualdades $P = k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots + k_nP_n$ e $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ se relacionam pela fórmula*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Isso nos diz que, em termos práticos, as coordenadas baricêntricas do ponto determinado pela combinação convexa $k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots + k_nP_n$ podem ser obtidas pela substituição na expressão das relações $P_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C$ e a realização formal dos cálculos (tudo se passa como se A, B e C fossem

[2] Nesse caso, é fácil ver que P pertence ao segmento AB se, e só se, $0 \leq t \leq 1$.

[3] Também se costuma escrever essa igualdade na forma $\frac{BD}{DC} = k$.

indeterminadas). *Por exemplo, se MNP é o triângulo medial de ABC e $T = \frac{1}{3}M + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P$, então*

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)A + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)B \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)C \\
&= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \\
&= G,
\end{aligned}$$

confirmando o fato de que um triângulo e seu triângulo medial têm o mesmo baricentro.

Relativamente à observação anterior, podemos, inversamente, reescrever a igualdade $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ como $P = \alpha A + (\beta+\gamma)(\frac{\beta}{\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}C)$ (se $P \neq A$). Definindo $D = \frac{\beta}{\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}C$, vemos que D é um ponto da reta $\overleftrightarrow{BC}$ e $P = \alpha A + (\beta+\gamma)D$, de modo que P pertence à reta $\overleftrightarrow{AD}$. Dessa forma, $D \in \overleftrightarrow{AP} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Isso nos dá a seguinte

Proposição 8. *Se $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ e a reta $\overleftrightarrow{AP}$ corta a reta suporte do lado BC no ponto D, então D divide BC na razão γ/β.*

Prova. Tacitamente, estamos supondo que $P \notin \overleftrightarrow{AC}$, a fim de que $\beta \neq 0$. Como já explicado acima, temos $D = \frac{\beta}{\beta+\gamma}B + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}C$. Pela Proposição 6, D divide BC na razão $\frac{\gamma/(\beta+\gamma)}{\beta/(\beta+\gamma)} = \frac{\gamma}{\beta}$, como queríamos. □

Da proposição anterior, obtemos o

Teorema 9 (de Ceva). [4] *Seja P um ponto no plano de um triângulo ABC, sendo que P não pertence a qualquer uma*

[4] Veja também o Teorema 17 da aula *Equivalências Afins e Aplicações - Parte I* do módulo de *Transformações Lineares: Álgebra e Geometria.*

das retas suporte dos lados desse triângulo. Se as cevianas $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BP}$ *e* $\overleftrightarrow{CP}$ *cortam os lados* BC, CA *e* AB *nos pontos* D, E *e* F*, respectivamente, então*

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Prova. De fato, nas notações da Proposição 6, temos $\frac{BD}{DC} = \frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{\alpha}{\gamma}$ e $\frac{AF}{FB} = \frac{\beta}{\alpha}$. Então, $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$. □

Agora considere o incentro I de um triângulo ABC, de lados $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ e $c = \overline{AB}$. Perceba que I pertence ao interior de ABC e a distância desse ponto a cada um dos lados do triângulo é r, o raio do círculo inscrito em ABC. Da fórmula $\mathcal{A}(ABC) = \frac{r(a+b+c)}{2}$ é fácil ver que $[IBC]/[ABC] = a/(a+b+c)$. De maneira similar, obtemos as relações $[ICA]/[ABC] = b/(a+b+c)$ e $[IAB]/[ABC] = c/(a+b+c)$. Isso pode ser resumido no seguinte

Exemplo 10. *Nas notações da discussão anterior, temos que*

$$I = \frac{a}{a+b+c}A + \frac{b}{a+b+c}B + \frac{c}{a+b+c}C.$$

Daí, segue o

Teorema 11 (da Bissetriz Interna). *Se* D *é o pé da bissetriz interna do triângulo* ABC *relativa ao vértice* A*, então* $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$.

Prova. Com efeito, pela Proposição (8) e pelo exemplo anterior, temos que $\frac{BD}{DC} = \frac{c/(a+b+c)}{b/(a+b+c)} = \frac{c}{b}$. □

3 Caracterizando o determinante

Nesta seção, veremos que o determinante é, essencialmente, a única função das colunas de uma matriz que é alternante, homogênea e aditiva. Com rigor, seja f uma função que associa a cada par (u,v) de vetores-coluna (uma matriz 2×2) um número real. Se

1. f é alternante: $f(u,v) = -f(v,u)$ (daí, $f(u,u) = 0$);

2. f é homogênea: $f(ku,v) = f(u,kv) = kf(u,v)$;

3. f é aditiva: $f(u+w,v) = f(u,v)+f(w,v)$ e $f(u,v+w) = f(u,v) + f(u,w)$,

para quaisquer u, v, w e para cada número real k, afirmamos que f é um múltiplo do determinante. Mais precisamente, se $\lambda = f(\mathbf{i},\mathbf{j})$, em que $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são as colunas da matriz identidade, então

$$f(u,v) = \lambda \det[u,v],$$

para todo par (u,v).

De fato, as igualdades $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ equivalem a $u = a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j}$ e $v = c \cdot \mathbf{i} + d \cdot \mathbf{j}$. Utilizando as propriedades da função f, temos

$$\begin{aligned}
f(u,v) &= f(a \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{j}, c \cdot \mathbf{i} + d \cdot \mathbf{j}) \\
&= f(a \cdot \mathbf{i}, c \cdot \mathbf{i} + d \cdot \mathbf{j}) + f(b \cdot \mathbf{j}, c \cdot \mathbf{i} + d \cdot \mathbf{j}) \\
&= f(a \cdot \mathbf{i}, c \cdot \mathbf{i}) + f(a \cdot \mathbf{i}, d \cdot \mathbf{j}) + f(b \cdot \mathbf{j}, c \cdot \mathbf{i}) + f(b \cdot \mathbf{j}, d \cdot \mathbf{j}) \\
&= acf(\mathbf{i},\mathbf{i}) + adf(\mathbf{i},\mathbf{j}) + bcf(\mathbf{j},\mathbf{i}) + bdf(\mathbf{j},\mathbf{j}) \\
&= adf(\mathbf{i},\mathbf{j}) - bcf(\mathbf{i},\mathbf{j}) \\
&= f(\mathbf{i},\mathbf{j})(ad - bc) \\
&= \lambda \det[u,v],
\end{aligned}$$

como queríamos.

O teorema abaixo registra esse resultado relevante.

Teorema 12. *Se $f = f(u,v)$ é uma função alternante, homogênea e aditiva de pares (u,v) de vetores-coluna, então f é um múltiplo do determinante. Mais precisamente, $f = \lambda \det$, sendo $\lambda = f(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})$, o valor de f na matriz identidade.*

Mais geralmente, a função determinante $\det : T \mapsto \det T$, sendo T uma matriz de ordem n, é a única função das colunas de T que é alternante, homogênea, aditiva e assume o valor 1 na matriz identidade. Sugerimos que o leitor explicite essas propriedades fundamentais do determinante para matrizes de ordem n ou consulte a referência [2]. Se $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, temos

$$\det T = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) t_{1\sigma(1)} t_{2\sigma(2)} \dots t_{n\sigma(n)}, \tag{7}$$

em que o somatório se estende sobre todas as permutações σ do conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ e $\epsilon(\sigma)$ denota o sinal de σ.

Como caso particular de (7), se $T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, então

$$\begin{aligned} \det T &= t_{11}t_{22}t_{33} + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{13}t_{21}t_{32} \\ &\quad - t_{13}t_{22}t_{31} - t_{11}t_{23}t_{32} - t_{12}t_{21}t_{33}. \end{aligned}$$

O segundo membro da expressão acima pode ser facilmente recordado por meio da *regra de Sarrus*:

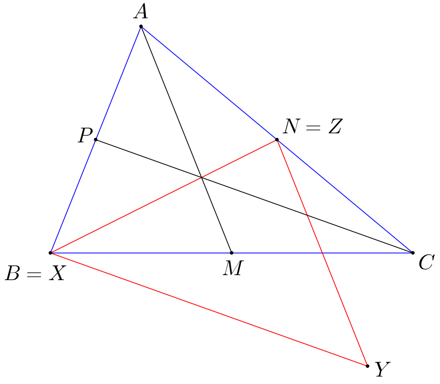
$$\begin{array}{ccc:cc} + & + & + & & \\ t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{31} & t_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

4 Algumas aplicações

Exemplo 13. *Com as medianas de um triângulo ABC formamos um triângulo XYZ. Em termos mais precisos, se M, N e P são os pontos médios dos lados BC, CA e AB, respectivamente, o triângulo XYZ satisfaz $\overline{XY} = \overline{CP}$, $\overline{YZ} = \overline{AM}$ e $\overline{ZX} = \overline{BN}$. Calcule $\mathcal{A}(XYZ)/\mathcal{A}(ABC)$, a razão entre as áreas dos triângulos XYZ e ABC.*

Solução. O argumento que segue estabelece a existência do triângulo XYZ. Naturalmente, como os lados de XYZ estão determinados, o triângulo XYZ é único, a menos de congruências.

Tome $B = X$, $Z = N$ e seja $Y = Z + \overrightarrow{AM}$, a translação do ponto Z pelo vetor $\overrightarrow{AM}$, de modo que $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{AM}$. (Acompanhe na figura a seguir.)



Lembrando que o vetor-mediana que sai de um vértice é a média aritmética dos vetores-lado que emanam do mesmo vértice (e.g., $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$), temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZY} \\
&= \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}\right) \\
&= -\overrightarrow{CP},
\end{aligned}$$

de onde se conclui que as medidas dos lados XY, YZ e ZX são as medidas das medianas CP, AM e BN, respectivamente. Agora precisamos calcular (por exemplo)

$$\det[\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}] = -\det\left[\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}, \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}\right].$$

Utilizando as propriedades do determinante, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
\det[\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ}] = -\frac{1}{4}(&\det[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}] + \det[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}] \\
&+ \det[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}]),
\end{aligned}$$

de forma que

$$\det[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}] = \frac{1}{4}(\det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]+\det[\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}]+\det[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}]).$$

Pelas relações em (2), vale

$$\det[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}] = \frac{3}{4}\det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}],$$

de onde segue que

$$\frac{\mathcal{A}(XYZ)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{1/2|\det[\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XZ}]|}{1/2|\det[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|} = \frac{3}{4}.$$

□

Teorema 14. *Sejam ABC um triângulo e P_1, P_2, P_3 pontos no plano, dados pelas suas coordenadas baricêntricas relativamente a ABC como $P_i = \alpha_i A + \beta_i B + \gamma_i C$, com $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$ para cada $i = 1, 2, 3$. Então*

$$\frac{[P_1P_2P_3]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Prova. Das relações $\overrightarrow{AP_i} = \beta_i\overrightarrow{AB} + \gamma_i\overrightarrow{AC}$, para $1 \le i \le 3$, segue que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (\beta_2 - \beta_1)\overrightarrow{AB} + (\gamma_2 - \gamma_1)\overrightarrow{AC}$$

e

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (\beta_3 - \beta_1)\overrightarrow{AB} + (\gamma_3 - \gamma_1)\overrightarrow{AC}.$$

Utilizando as propriedades do determinante, calculamos

$$\begin{aligned}[P_1P_2P_3] &= \frac{1}{2}\det[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3}] \\ &= [(\beta_2 - \beta_1)(\gamma_3 - \gamma_1) - (\beta_3 - \beta_1)(\gamma_2 - \gamma_1)][ABC].\end{aligned}$$

Como

$$(\beta_2-\beta_1)(\gamma_3-\gamma_1)-(\beta_3-\beta_1)(\gamma_2-\gamma_1)=\begin{vmatrix}1 & \beta_1 & \gamma_1\\ 1 & \beta_2 & \gamma_2\\ 1 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

e $1=\alpha_i+\beta_i+\gamma_i, \forall\, i$, a aditividade do determinante dá

$$(\beta_2-\beta_1)(\gamma_3-\gamma_1)-(\beta_3-\beta_1)(\gamma_2-\gamma_1)=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix},$$

resultando na fórmula desejada. □

Dado um triângulo ABC, seja $H_aH_bH_c$ seu *triângulo órtico*, isto é, aquele no qual H_a, H_b e H_c são os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C, respectivamente. Nosso próximo teorema estabele que, caso ABC seja acutângulo, tem-se

$$\mathcal{A}(ABC)=sR,$$

em que s é o semiperímetro do triângulo órtico e R é o raio do círculo circunscrito a ABC. Antes, precisaremos do seguinte

Lema 15. *Se ABC é um triângulo acutângulo e ρ é o raio do círculo inscrito no triângulo órtico de ABC, então $\rho = 2R\cos A\cos B\cos C$.*

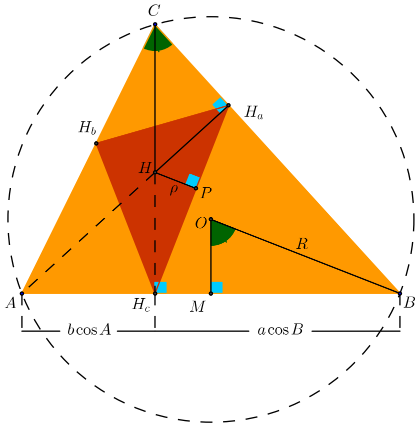
Prova. Apresentaremos as linhas gerais do argumento, deixando os detalhes ao encargo do leitor. (Acompanhe na próxima figura.)

Como H, o ortocentro de ABC, é o incentro do triângulo órtico (veja [1], seção 3.5), vemos que $\rho=\overline{HP}$, a distância de H ao lado H_aH_c. Se O é o circuncentro de ABC e M é o ponto médio do lado AB, sabemos que $\overline{CH}=2\overline{OM}$ (vide exemplo 20 da aula *Vetores no Plano - Parte II* do módulo de *Geometria das Transformações Lineares*). Portanto, relativamente ao triângulo CHH_a, temos

$$\overline{HH_a}=\overline{CH}\,\mathrm{sen}(90^\circ-B)=2\overline{OM}\cos B=2R\cos B\cos C.$$

Por outro lado, no triângulo PHH_a, vale

$$\rho=\overline{HH_a}\,\mathrm{sen}(90^\circ-A)=2R\cos A\cos B\cos C.$$



$\square$

Teorema 16. *Se ABC é um triângulo acutângulo, s é o semiperímetro do triângulo órtico e R é o raio do círculo circunscrito a ABC, então*

$$\mathcal{A}(ABC) = sR.$$

Prova. Ainda em relação à figura anterior, note que $H_c = \frac{a\cos B}{c}A + \frac{b\cos A}{c}B$. De forma análoga, temos $H_b = \frac{a\cos C}{b}A + \frac{c\cos A}{b}C$ e $H_a = \frac{b\cos C}{a}B + \frac{c\cos B}{a}C$. Portanto, pela fórmula (8), vale

$$\begin{aligned}\frac{[H_aH_bH_c]}{[ABC]} &= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 0 & b\cos C & c\cos B \\ a\cos C & 0 & c\cos A \\ a\cos B & b\cos A & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 15, podemos escrever $\frac{[H_aH_bH_c]}{[ABC]} = \frac{\rho}{R}$ ou, ainda, $\mathcal{A}(ABC) = \frac{\mathcal{A}(H_aH_bH_c)}{\rho}R$. Como a área de um triângulo é o produto do semiperímetro pelo inraio, concluímos que $\frac{\mathcal{A}(H_aH_bH_c)}{\rho} = s$, de onde segue a relação desejada. $\square$

Dicas para o Professor

Problemas envolvendo o cálculo de áreas relativamente a um triângulo de referência são muitas vezes tratados de forma eficiente com o uso de coordenadas baricêntricas. É isso que nos indica a interpretação geométrica dos coeficientes α, β, γ, dada nas relações (3), (4), (5), e a fórmula (8). A esse respeito, além da aplicação do método na demonstração do Teorema 16, gostaríamos de sugerir ao professor uma solução ligeiramente diferente do Exemplo 13: tendo como referencial o triângulo ABC (e de acordo com a figura do exemplo), vale $X = (0,1,0), Y = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ e $Z = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$. O único cálculo não trivial refere-se ao ponto Y. Ora, como $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NY} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM}$, vem $Y = (-1)A + N + M$. Substituindo nessa expressão as relações $M = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ e $N = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$, chegamos em $Y = (-\frac{1}{2})A + (\frac{1}{2})B + C$. Desse modo, o Teorema 14 e a regra de Sarrus dão $\frac{[XYZ]}{[ABC]} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol. 2. Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

2. E. L. Lima. et al. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 3.* 7ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

3. E. Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.* MAA Press. 2016.