Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivadas de Funções Trigonométricas

Exercícios - Parte II

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Setembro de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, aplicamos as fórmulas das derivadas de funções trigonométricas à resolução de alguns exemplos interessantes.

1 Exemplos

Exemplo 1. *Mostre que uma reta paralela à diagonal $x = y$ pode ser tangente, mas nunca secante, ao gráfico de $y = \cos x$.*

Solução. Em cada ponto da forma $(3\pi/2 + 2k\pi, 0)$, a tangente ao gráfico da função cosseno tem inclinação igual a

$$\cos'(3\pi/2 + 2k\pi)) = -\operatorname{sen}(3\pi/2 + 2k\pi) = 1.$$

Logo, tais retas tangentes são paralelas à diagonal $x = y$.

Por outro lado, dados números reais $a < b$, afirmamos que $|\cos b - \cos a| < b - a$. Isso mostrará que as inclinações das secantes ao gráfico de cos têm módulo menor que 1, encerrando a solução.

Com efeito, basta lembrar das relações

$$\cos b - \cos a = -2 \operatorname{sen} \frac{b+a}{2} \operatorname{sen} \frac{b-a}{2}$$

e

$$|\operatorname{sen} x| < |x|, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$$

Daí, a substituição $x = (b - a)/2$ nessa desigualdade permite obter a estimativa

$$\begin{aligned} |\cos b - \cos a| &= 2\left|\operatorname{sen} \frac{b+a}{2}\right|\left|\operatorname{sen} \frac{b-a}{2}\right| \\ &< 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{b-a}{2}\right| = b - a. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais dados e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$. Se $|f(x)| \leq |\operatorname{sen} x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, prove que*

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

Solução. Vejamos que $|f'(0)| \leq 1$. De fato, com a desigualdade $|f| \leq |\operatorname{sen}|$, obtemos $f(0) = 0$ e, daí,

$$\begin{aligned}
|f'(0)| &= \left| \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \right| \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} \\
&= \left| \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo

$$f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + na_n \cos nx,$$

vem que $f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$. Portanto, a relação $|f'(0)| \leq 1$ também se escreve como

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

$\square$

Exemplo 3. *$ABCD$ é um trapézio isósceles de bases AD e BC, com $\overline{AD} > \overline{BC}$. Se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$, um comprimento dado, calcule a medida dos ângulos $B\widehat{A}D = A\widehat{D}C$ que maximiza a área de $ABCD$.*

Solução. Pondo $\theta := B\widehat{A}D$, é fácil ver (observe a figura a seguir) que a altura do trapézio mede $a \operatorname{sen} \theta$ e a base maior mede $a + 2a\cos\theta$. Portanto, a área $\mathcal{A}(\theta)$ de $ABCD$ se expressa por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\theta) &= \frac{1}{2}\left(a + (a + 2a\cos\theta)\right) a \operatorname{sen}\theta \\
&= a^2(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta).
\end{aligned}$$

Essa expressão acima define uma função derivável $\mathcal{A} : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$, cujo(s) ponto(s) de máximo estamos à procura.

Observando que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'(\theta) &= a^2(\cos\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\
&= a^2(\cos\theta + \cos(2\theta))
\end{aligned}$$

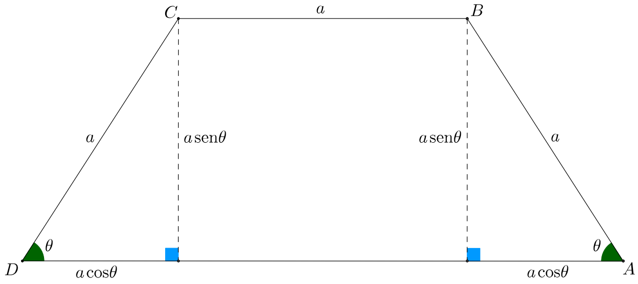

Figura 1: exemplo 3.

afirmamos que $\mathcal{A}'$ é decrescente. De fato, basta notar que, como

$$\mathcal{A}''(\theta) = -a^2(2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \mathrm{sen}\,\theta),$$

tem-se $\mathcal{A}''(\theta) < 0$, uma vez que $0 < \theta < \pi/2 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,2\theta > 0$. Portanto, sendo

$$\mathcal{A}'(\pi/3) = a^2\Big(\cos(\pi/3) + \cos(2\pi/3)\Big) = 0,$$

conclui-se que

$$\mathcal{A}'(\theta)\begin{cases} > 0, & \text{se } 0 < \theta < \pi/3 \\ < 0, & \text{se } \pi/3 < \theta < \pi/2 \end{cases}.$$

Pelo teste da 1ª derivada, $\theta = \pi/3$ é ponto de máximo estrito de $\mathcal{A}$, ou seja, quando $B\widehat{A}D = 60^\circ$, a área de $ABCD$ é a maior possível. $\square$

Para o próximo exemplo, precisaremos do seguinte fato algébrico: *se p, q, r são números reais tais que $p + q + r = 0$, então*

$$p^3 + q^3 + r^3 = 3pqr. \tag{1}$$

A verificação dessa relação é direta. Realmente, fazendo uso da identidade

$$(p + q)^3 = p^3 + 3pq(p + q) + q^3$$

e substituindo $p+q$ por $-r$, obtemos $(-r)^3 = p^3+3pq(-r)+q^3$, igualdade equivalente a (1).

Exemplo 4 (Olimpíada Romena - 1996).

(a) *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções periódicas tais que a função soma* $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ *tem limite finito quando* $x \to +\infty$. *Mostre que* f *é constante.*

(b) *Sejam* p, q, r *números reais tais que*

$$p\cos(px) + q\cos(qx) + r\cos(rx) \geq 0,$$

para todo número real x. *Mostre que* $pqr = 0$.

Solução. O item (a) será provado por indução sobre n. Para o caso $n = 1$, temos uma função periódica $f = f_1$, de período $T > 0$, cujo limite L em $+\infty$ existe.

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, vale, para cada natural n,

$$f(x) = f(x+nT) \quad \text{e} \quad f(y) = f(y+nT).$$

Daí,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x+nT) = L = \lim_{n\to+\infty} f(y+nT) = f(y),$$

de sorte que f é constante.

Supondo o resultado válido para um certo n natural, seja $f = f_1 + \cdots + f_n + f_{n+1}$ uma soma de $n+1$ funções periódicas, tal que $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe e é finito. Se T for um período para f_{n+1}, provaremos que f também admite T como um período. Com efeito, a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x+T) - f(x)$, *é soma de n funções periódicas.*

Para justificar a afirmação acima, seja T_i um período de f_i para cada $1 \leq i \leq n$. Então, é fácil verificar que T_i também é um período da função

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto g_i(x) := f_i(x+T) - f_i(x), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(x+T) - f(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(x+T) + f_{n+1}(x+T) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f_{n+1}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(f_i(x+T) - f_i(x)) + \underbrace{(f_{n+1}(x+T) - f_{n+1}(x))}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} g_i(x).
\end{aligned}$$

Logo, $g = g_1 + \cdots + g_n$, sendo cada g_i periódica, como afirmado.

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+T) - \lim_{x\to+\infty} f(x) = L - L = 0.$$

Por hipótese de indução, g é constante, ou melhor, g é identicamente nula, pois tal função tem limite nulo em $+\infty$. Concluímos, pois, que $f(x+T) = f(x)$ para todo x real.

Pela base de indução, segue da periodicidade de f e da existência do limite dessa função em $+\infty$ que f é constante.

Quanto ao item (b), considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(px) + \operatorname{sen}(qx) + \operatorname{sen}(rx)$. Então,

$$f'(x) = p\cos(px) + q\cos(qx) + r\cos(rx) \geq 0,$$

de modo que f é monótona não decrescente. Sendo tal função limitada (pois $|\operatorname{sen}| \leq 1$ implica $|f(x)| \leq |\operatorname{sen}(px)| + |\operatorname{sen}(qx)| + |\operatorname{sen}(rx)| \leq 3$), existe e é finito o limite de f em $+\infty$. Pelo item anterior, f, uma soma de funções periódicas, é constante. Assim, todas as derivadas dessa função são identicamente nulas, sendo que as relações $f' \equiv 0$ e $f''' \equiv 0$ equivalem a

$$p\cos(px) + q\cos(qx) + r\cos(rx) \tag{2}$$

e

$$p^3\cos(px) + q^3\cos(qx) + r^3\cos(rx) = 0. \tag{3}$$

Fazendo $x = 0$ em (2) e (3), vem que

$$p + q + r = 0 = p^3 + q^3 + r^3,$$

de onde segue, por (1), a igualdade desejada, $pqr = 0$. $\square$

Exemplo 5. *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável e k um número real positivo. Se $f''(x) + kf(x) = 0$ para cada x, mostre que*

$$f(x) = f(0)\cos\sqrt{k}x + \frac{f'(0)}{\sqrt{k}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{k}x \tag{4}$$

para todo número real x.

Solução. Inicialmente, suponhamos $f(0) = f'(0) = 0$. Multiplicando ambos os membros da igualdade $f''(x)+kf(x) = 0$ por $2f'(x)$, ficamos com

$$2f'(x)f''(x) + 2kf(x)f'(x) = 0.$$

Notando que o 1º membro dessa relação é a derivada em x da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f'(x)^2 + kf(x)^2$, segue que $g' \equiv 0$, isto é, g é constante. Todavia, $g(0) = f'(0)^2 + kf(0)^2 = 0$, de onde se conclui que g é identicamente nula. Como $k > 0$, a relação $(f')^2 + kf^2 = 0$ implica $f \equiv 0$.

Para o caso geral, considere a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de regra

$$\phi(x) = f(x) - (f(0)\cos\sqrt{k}x + (f'(0)/\sqrt{k})\,\mathrm{sen}\,\sqrt{k}x).$$

Utilizando as fórmulas de derivação, o leitor não terá dificuldades em verificar os seguintes fatos:

1. $\phi''(x) + k\phi(x) = 0$ para todo x.

2. $\phi(0) = \phi'(0) = 0$.

Pelo parágrafo anterior, $\phi \equiv 0$, ou seja, vale (4). $\square$

Exemplo 6 (Putnam - 1941, adaptado). *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função duas vezes derivável, tal que*

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 + f(y)^2 - 1, \tag{5}$$

para quaisquer números reais x *e* y.

(a) *Mostre que* $f'' + kf = 0$ *para alguma constante* k.

(b) *Se* f *for limitada, prove que* $k \geq 0$ *e conclua que* $f(x) = \cos\sqrt{k}x$ *ou* $f(x) = -\cos\sqrt{k}x$, *para cada* x *real.*

Solução. Começamos observando que $f(0) = \pm 1$. De fato, as substituições $x = y = 0$ em (5) resultam em

$$f(0)^2 = f(0)^2 + f(0)^2 - 1,$$

ou seja, $f(0)^2 = 1$, justificando a observação.

Derivando a relação (5) com respeito a y, vem que [1]

$$f'(x+y)f(x-y) - f(x+y)f'(x-y) = 2f(y)f'(y). \tag{6}$$

Em particular, fazendo $x = y = 0$ nessa igualdade, encontramos $2f(0)f'(0) = 0$, isto é, $f'(0) = 0$.

Se derivarmos (6) em relação a x, obteremos

$$f''(x+y)f(x-y) - f(x+y)f''(x-y) = 0,$$

atentando ao cancelamento das parcelas que envolvem a 1ª derivada. Daí, pondo no lugar de x e y o valor $x/2$, segue que

$$f(0)f''(x) - f''(0)f(x) = 0, \quad \text{isto é,} \quad f''(x) + kf(x) = 0,$$

sendo $k = -f''(0)/f(0)$.

Quanto ao item (b), suponhamos, inicialmente, que $f(0) = 1$. Derivando (6) em relação a y, obtemos

$$f''(x+y)f(x-y) - 2f'(x+y)f'(x-y) + f(x+y)f''(x-y)$$
$$= 2(f'(y)^2 + f(y)f''(y)).$$

[1] Recorde, da 1ª página da aula *Exercícios - Parte II*, do módulo *Fórmulas de Diferenciação*, a regra $\frac{d(f(at+b))}{dt} = af'(at+b)$.

Assim, fazendo $x = y$, chegamos à igualdade

$$\begin{aligned} &f''(2x)f(0) - 2f'(2x)f'(0) + f(2x)f''(0) \\ &= 2(f'(x)^2 + f(x)f''(x)). \end{aligned}$$

Dela decorre, pelas substituições $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -k$ e $f''(x) = -kf(x)$, a relação

$$-2kf(2x) = 2(f'(x)^2 - kf(x)^2),$$

ou seja,

$$kf(2x) = kf(x)^2 - f'(x)^2, \tag{7}$$

para todo x.

Se $k = 0$, vemos da última igualdade que $f' \equiv 0$, de sorte que f é constante. Assim,

$$f(x) = f(0) = 1 = \cos(\sqrt{0} \cdot x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Caso k seja não nulo, devemos provar que $k > 0$. Daí, pelo exemplo anterior, valerá

$$f(x) = f(0)\cos\sqrt{k}x + (f'(0)/\sqrt{k})\,\mathrm{sen}\,\sqrt{k}x = \cos\sqrt{k}x$$

para todo x.

Substituindo x por $x/2$ na relação (7), vem que

$$f(x) = f(x/2)^2 + \frac{f'(x/2)^2}{-k}.$$

Portanto, se fosse $k < 0$, f seria não negativa. Por sua vez, $f'' = (-k) \cdot f$ também seria não negativa, de onde concluiríamos a convexidade de f. Assim, o exemplo 2 da aula *Exercícios - Parte II*, do módulo *Derivada como Função*, implicaria a validade de pelo menos um dos limites abaixo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Isso contradiz a limitação de f, logo, k deve ser positivo.

No caso em que $f(0) = -1$, os argumentos anteriores aplicados a $-f$ dão $-f(x) = \cos\sqrt{k}x$, para todo x.

$\square$

Dicas para o Professor

A equação diferencial ordinária (EDO) de 1ª ordem

$$f' = af, \tag{8}$$

em que a é uma constante real, fornece um modelo matemático simples para vários fenômenos importantes, como *decaimento radioativo*, *resfriamento de um corpo* e *crescimento populacional*.

De acordo com a solução do exemplo 2 da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo *Fórmulas de Diferenciação*, as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f' = f$ são múltiplas da exponencial (e reciprocamente). De outro modo, f é uma solução de (8) com $a = 1$ se, e somente se, $f(x) = f(0)e^x$. Daí, é simples obter a solução geral de (8) para a arbitrário. De fato, supondo $a \neq 0$ e $f' = af$, a função $g(x) = f(x/a)$, $x \in \mathbb{R}$, satisfaz

$$g'(x) = f'(x/a)/a = f(x/a) = g(x),$$

de sorte que $g(x) = g(0)e^x$. Pelas relações $g(0) = f(0)$ e $f(x) = g(ax)$, fica fácil obter a solução geral da EDO (8): $f(x) = f(0)e^{ax}$.

Por outro lado, se a, b são números reais fixados, a EDO de 2ª ordem

$$f'' + af' + bf = 0 \tag{9}$$

também modela cenários físicos relevantes, dentre os quais podemos citar o *sistema massa-mola* e os *circuitos elétricos RLC*. Na referência [1], o leitor encontrará uma discussão instrutiva dessas aplicações do Cálculo à Física.

Ainda na referência [1], apresenta-se a solução geral da EDO (9), reduzindo seu estudo à análise da EDO de 2ª ordem simplificada

$$f'' + kf = 0. \tag{10}$$

Invocando o exemplo 5, a solução geral dessa EDO, no caso em que $k > 0$, é uma combinação linear das funções $\cos\sqrt{k}x$ e $\operatorname{sen}\sqrt{k}x$. Aliás, com pequenas adaptações na solução daquele exemplo, o leitor poderá provar que a solução geral de (10), para $k < 0$, é uma combinação linear das *funções trigonométricas hiperbólicas* [2] $\cosh\sqrt{-k}x$ e $\operatorname{senh}\sqrt{-k}x$ [3]. Finalmente, as soluções de (10) quando k é nulo consistem das funções afins.

Tendo completado o estudo da EDO $f''+kf = 0$, podemos determinar o conjunto-solução da equação funcional (5). Com efeito, o item (a) do último exemplo garante que as soluções de (5) são as funções $\pm\cos\sqrt{k}x$ e $\pm\cosh\sqrt{k}x$, para $k \geq 0$.

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro, 2022.

2. R. Gelca e T. Andreescu. *Putnam and Beyond*, 2ª ed. Springer Nature, Cham, 2017.

[2]Confira a discussão anterior ao exemplo 4 da aula *Exercícios - Parte I*, do módulo *Fórmulas de Diferenciação*.

[3]Nesse sentido, o exemplo 3 da aula *Exercícios - Parte II*, do módulo *Fórmulas de Diferenciação*, pode ser útil.