Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Definição de Derivada

Reta Tangente - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Julho de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Continuaremos apresentando exemplos que exploram a interpretação geométrica da derivada, qual seja, $f'(a)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$.

Em várias ocasiões, utilizaremos os resultados enunciados na proposição 8 da aula *Funções Racionais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*.

1 Exemplos

Para os primeiros dois exemplos, sejam

$$\begin{array}{c} a \text{ um ponto } \textit{interior} \text{ ao intervalo } I,\ f : I \to \mathbb{R} \text{ e} \\ r \text{ uma reta passando pelo ponto } P = (a,f(a)). \end{array} \tag{1}$$

Exemplo 1 (vide (1)). *Se f é derivável em a e o gráfico de f está contido em um dos semiplanos fechados determinados por r, mostre que r é a reta tangente ao gráfico de f em P.*

Solução. Como a reta r passa pelo ponto $P = (a,f(a))$, a equação reduzida dessa reta é

$$y = f(a) + m(x - a),$$

sendo m a inclinação de r. Portanto, obteremos a conclusão desejada se provarmos que $m = f'(a)$.

De fato, um dos semiplanos (fechados) determinados por r, digamos π^+, é definido pela inequação

$$\pi^+ : y \geq f(a) + m(x - a),$$

enquanto o semiplano oposto π^- é dado por

$$\pi^- : y \leq f(a) + m(x - a).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o gráfico de f esteja contido em π^+, de forma que

$$f(x) \geq f(a) + m(x - a), \tag{2}$$

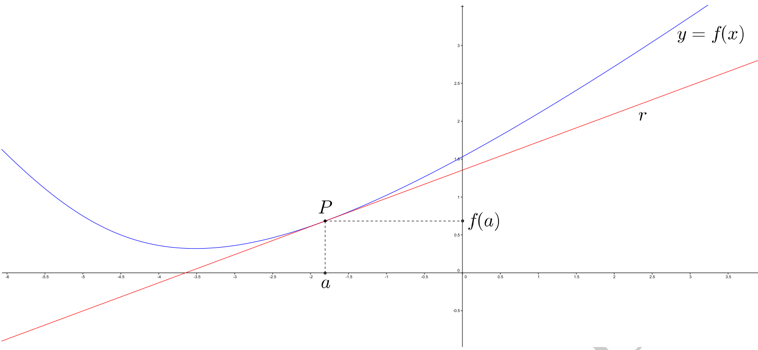

Figura 1: exemplo 1.

para cada x em I. Se $x > a, x \in I$, segue da desigualdade (2) a seguinte inequação:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq m,$$

que, ao fazermos $x \to a^+$, dá

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq m, \tag{3}$$

pela permanência do sinal. Por outro lado, repetindo o argumento, agora com $x < a, x \in I$, o fato de $x - a$ ser negativo garante, por (2), a desigualdade

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq m,$$

de sorte que

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq m. \tag{4}$$

As relações (3) e (4) dão a igualdade $f'(a) = m$. (Vide a figura 1.) $\square$

Na aula *Propriedades* do próximo módulo, mostraremos que toda função derivável é contínua. Assim, o esboço do gráfico de uma função derivável f, definida em um intervalo, consiste de um traçado contínuo, sem saltos. Mais ainda, a existência de retas tangentes permite visualizar o gráfico de f como uma curva *suave*, sem "quinas". Nesse sentido, apresentamos o

Exemplo 2 (vide (1))**.** *Se alguma região angular $\mathcal{R}$, de ângulo menor que $180°$ e vértice P, contém o gráfico de f, mostre que f não é derivável no ponto a.*

Solução. Seja G o gráfico de f, sejam r e s as retas suportes dos lados de $\mathcal{R}$, de inclinações m_r e m_s, respectivamente.

Note que $\mathcal{R}$ é a interseção de dois semiplanos fechados, digamos π_r e π_s, com origens nas retas r e s; também, com $G \subset \pi_r, \pi_s$. Portanto, se f fosse derivável em a, o exemplo anterior implicaria as igualdades $m_r = f'(a) = m_s$. Então, as retas r e s coincidiriam, ou seja, $\mathcal{R}$ seria uma região angular *rasa* (isto é, com ângulo igual a $180°$), contradizendo a hipótese. Logo, f não é derivável no ponto a. $\square$

Exemplo 3 (OBMU - 2005, 1ª fase, problema 1)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c inteiros. Sabe-se que $f(1) = f(-1) = 0$. As retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $A = (-1,0)$ e $B = (1,0)$ cortam-se em C. Calcule a área do triângulo ABC, sabendo que tal área é inteira.*

Solução. As condições $f(1) = f(-1) = 0$ se traduzem como

$$a + b + c = -1 \text{ e } a - b + c = 1.$$

Adicionando as igualdades acima membro a membro, chegamos à relação $2(a + c) = 0$, ou seja, $c = -a$. Daí, segue-se imediatamente que $b = -1$, e a regra da função f pode ser reescrita na forma

$$f(x) = x^3 + ax^2 - x - a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim, pela primeira parte da proposição 8 da aula *Funções Racionais* do módulo *Leis do Limite - Parte 2*, vale

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 1,$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Desse modo, as retas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos $A = (-1{,}0)$ e $B = (1{,}0)$, respectivamente, têm inclinações

$$m_r = f'(-1) = 2(1-a) \text{ e } m_s = f'(1) = 2(1+a).$$

Consequentemente, as equações reduzidas dessas retas são

$$r : y = 2(1-a)(x+1) \text{ e } s : y = 2(1+a)(x-1).$$

Como as retas r e s cruzam-se no ponto $C = (x_C, y_C)$ (digamos), tais coordenadas satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} y_C = 2(1-a)(x_C+1) \\ y_C = 2(1+a)(x_C-1) \end{cases},$$

de onde se conclui a(s) relação(ões)

$$x_C = 1/a \text{ e } y_C = -2a + 2/a.$$

(Perceba que, sendo as retas r e s secantes ($C = r \cap s$), vale $m_r \neq m_s$, isto é, $a \neq 0$.)

Desse modo, a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB tem comprimento $|-2a + 2/a|$, enquanto a base AB mede 2. Logo, a área S de ABC pode ser calculada como

$$S = \frac{2 \cdot |-2a + 2/a|}{2} = |-2a + 2/a|.$$

Sendo a e S números inteiros, $\frac{2}{a} = 2a \pm S$ também é um inteiro, de forma que a divide 2, ou seja, $a = \pm 1$ ou $a = \pm 2$.

Se $a = \pm 1$, então $S = |\mp 2 \pm 2| = 0$, caso que não convém considerar sob a hipótese de que ABC é não degenerado.

Se $a = \pm 2$, então $S = |\mp 4 \pm 1| = 3$, a resposta procurada (veja a figura 2). $\square$

Sejam G_1 e G_2 os gráficos das funções deriváveis f_1 e f_2. Se $P \in G_1 \cap G_2$, dizemos que G_1 e G_2 são tangentes em P se as retas tangentes a G_1 e G_2 em P coincidem.

Essa definição apresentada deve ser entendida em um sentido *local*, ou seja, basta que G_1 (resp. G_2) seja, em um

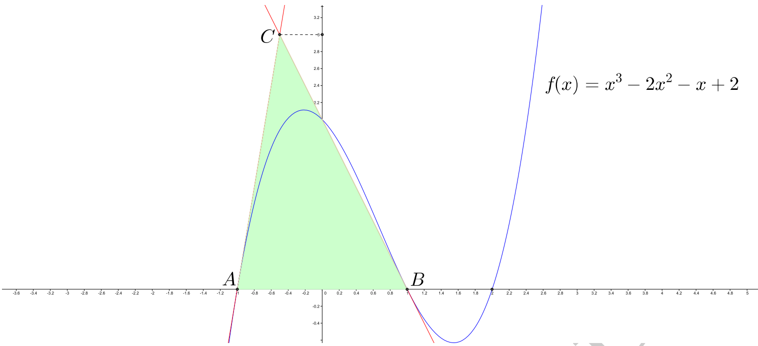

Figura 2: exemplo 3 com $a = -2$.

intervalo aberto centrado em cada ponto de seu domínio, o gráfico de uma função derivável $y = f(x)$ ou $x = g(y)$. Nesse sentido, G_1 poderia ser um círculo. Por exemplo, se G_1, G_2 são círculos distintos, de centros O_1, O_2 e raios R_1, R_2, sabemos que G_1 e G_2 são tangentes se, e só se, $\overline{O_1O_2} = R_1 + R_2$ (tangência externa) ou $\overline{O_1O_2} = |R_1 - R_2|$ (tangência interna).

Exemplo 4 (OBMU - 2013, 1ª fase, problema 3). *Considere a parábola $y = x^2/4$. Encontre o raio do círculo tangente a essa parábola e ao eixo y no foco* $(0,1)$ *da parábola.*

Solução. Se $\mathcal{C}$ é um círculo satisfazendo as condições do enunciado, então o simétrico de $\mathcal{C}$ com respeito ao eixo das ordenadas ainda é um círculo satisfazendo aquelas condições. Como simetrias preservam comprimentos e estamos interessados apenas na medida do raio de $\mathcal{C}$, podemos supor que esse círculo está situado à direita do eixo OY. Portanto, se $P = (x_0, x_0^2/4)$ for o ponto de tangência de $\mathcal{C}$ com a parábola $y = x^2/4$, temos $x_0 > 0$.

Agora sejam O o centro de $\mathcal{C}$ e G o ponto de encontro da reta horizontal $\overleftrightarrow{FO}$ com a reta vertical passando por P (acompanhe na figura 3). Se α é a medida do ângulo $\angle PFO$, temos as seguintes observações:

(i) $F\widehat{P}O = \alpha$, pois FPO é isósceles de base FP;

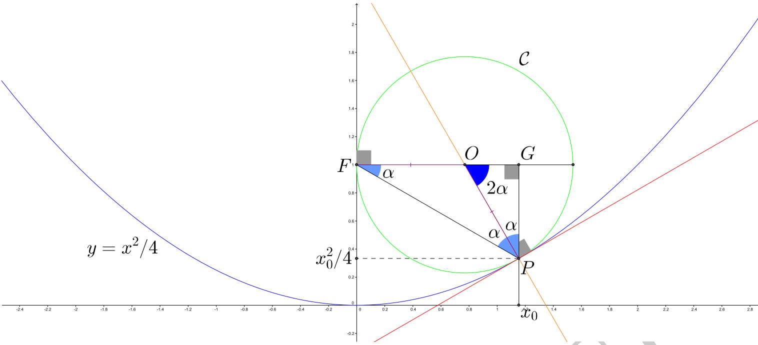

Figura 3: exemplo 4.

(ii) $P\widehat{O}G = 2\alpha$, pelo teorema do ângulo externo;

(iii) $O\widehat{P}G = \alpha$, pela propriedade refletora da parábola (vide exemplo 6 da 1ª aula desse módulo).

Logo, no triângulo PGO, retângulo em G, temos $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, isto é,

$$\alpha = 30^\circ. \qquad (5)$$

Por outro lado, como a reta tangente à parábola em P tem inclinação $x_0/2$ (veja o exemplo 10 da 1ª aula desse módulo), a inclinação da reta normal $\overleftrightarrow{OP}$ é $-2/x_0$, um número negativo. Comparando com (5), vemos que

$$-\frac{2}{x_0} = -\operatorname{tg}(2\alpha) = -\operatorname{tg}(60^\circ) = -\sqrt{3},$$

de onde se conclui a igualdade $x_0 = 2/\sqrt{3}$. Daí, segue-se que $x_0^2/4 = 1/3$ e $\overline{GP} = 1 - 1/3 = 2/3$.

Finalmente, se r é o raio de $\mathcal{C}$, temos, no triângulo PGO,

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\overline{GP}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{r} \Rightarrow r = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

$\square$

Antes do próximo exemplo, precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 5. *Se P é um polinômio e a é um número real arbitrário, então existe um polinômio Q tal que*

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + Q(x)(x-a)^2. \tag{6}$$

Prova. Se $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, seja $P(x+a) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, de forma que

$$P(x) = P[(x-a)+a] = \sum_{i=0}^{n} b_i (x-a)^i.$$

Definindo $Q(x) = b_n(x-a)^{n-2} + \cdots + b_3(x-a) + b_2$, a seguinte relação é imediata:

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + Q(x)(x-a)^2, \tag{7}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = a$ na relação anterior, vem que $b_0 = P(a)$. Portanto, de acordo com (7), temos, para cada número real $x \neq a$,

$$\begin{aligned} P(x) - P(a) &= b_1(x-a) + Q(x)(x-a)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{P(x)-P(a)}{x-a} &= b_1 + Q(x)(x-a), \end{aligned}$$

de sorte que

$$P'(a) = \lim_{x \to a} \frac{P(x)-P(a)}{x-a} = b_1 + Q(a)(a-a) = b_1.$$

Por fim, substituindo os valores encontrados para as constantes b_0 e b_1 em (7), obtemos a fórmula (6). $\square$

Exemplo 6. *Determine a equação da reta que tangencia a curva de equação $y = 3x^4 - 4x^3$ em dois pontos distintos.*

Solução 1. Seja $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial definida por $P(x) = 3x^4 - 4x^3$. Se $y = n + mx$ é a equação reduzida de uma reta r tangenciando o gráfico de P nos pontos (distintos) $(a,P(a))$ e $(b,P(b))$, temos as duas equações a seguir para r:

$$y = P(a) + P'(a)(x-a) \quad \text{e} \quad y = P(b) + P'(b)(x-b).$$

Portanto, aplicando o lema anterior ao polinômio P nos pontos a e b, sucessivamente, garantimos a existência de polinômios Q e R satisfazendo

$$P(x) - (n + mx) = Q(x)(x-a)^2 \tag{8}$$

e

$$P(x) - (n + mx) = R(x)(x-b)^2.$$

Comparando as igualdades acima, obtemos

$$Q(x)(x-a)^2 = R(x)(x-b)^2. \tag{9}$$

Afirmação: $Q(x)$ é divisível por $(x-b)^2$.

Com efeito, a substituição $x = b$ em (9) dá $Q(b)(b-a)^2 = 0$, ou seja, $Q(b) = 0$. Pelo teorema de D'Alembert (vide teorema 2 da 1ª aula do módulo *Leis do Limite - Parte 02*), $x - b$ divide $Q(x)$, digamos $Q(x) = (x-b)S(x)$, para algum polinômio S. Assim, a relação (9) pode ser simplificada para

$$S(x)(x-a)^2 = R(x)(x-b).$$

Repetindo o argumento anterior, concluímos que $x - b$ divide $S(x)$, de onde segue a afirmação.

Escrevendo $Q(x) = (x-b)^2 T(x)$, sendo T um polinômio, e substituindo essa relação em (8), chegamos em

$$3x^4 - 4x^3 - (n + mx) = T(x)(x-a)^2(x-b)^2.$$

Comparando graus, vemos que T deve ser constante, de sorte que $T \equiv 3$, o valor do coeficiente líder no 1ª membro da última igualdade. Portanto,

$$\begin{aligned} 3x^4 - 4x^3 - mx - n &= 3(x-a)^2(x-b)^2 \\ &= 3(x^2 - 2ax + a^2)(x^2 - 2bx + b^2) \\ &= 3\{x^4 - 2(a+b)x^3 + [(a+b)^2 + 2ab]x^2 \\ &\quad - 2ab(a+b)x + (ab)^2\}. \end{aligned}$$

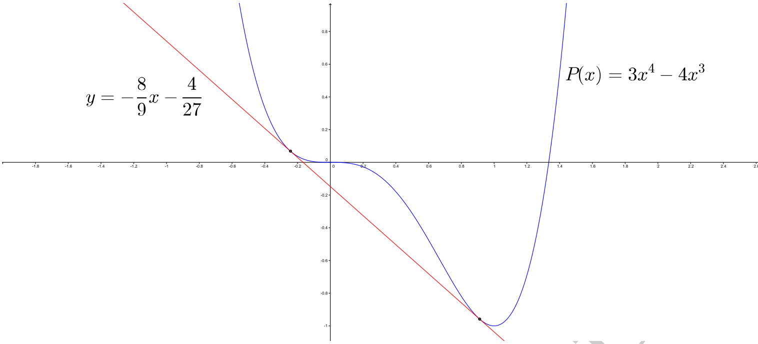

Figura 4: exemplo 6.

Comparando coeficientes no primeiro e último membros, vem que

$$6(a+b) = 4,\ (a+b)^2+2ab = 0,\ m = 6ab(a+b) \text{ e } n = -3(ab)^2.$$

Daí, segue que $a + b = 2/3$, $ab = -(a+b)^2/2 = -2/9$, $m = 6(-2/9)(2/3) = -8/9$ e $n = -3(2/9)^2 = -4/27$. □

Solução 2. Partindo das equações

$$y = P(a) + P'(a)(x-a) \quad \text{e} \quad y = P(b) + P'(b)(x-b)$$

para a reta tangente r, temos

$$P'(a) = P'(b) \quad \text{e} \quad P(a) - aP'(a) = P(b) - bP'(b).$$

Agora,

$$\begin{aligned} P'(a) = P'(b) &\Leftrightarrow 12a^3 - 12a^2 = 12b^3 - 12b^2 \\ &\Leftrightarrow a^3 - a^2 = b^3 - b^2 \\ &\Leftrightarrow a^3 - b^3 = a^2 - b^2 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)(a+b) \\ &\Leftrightarrow a^2+ab+b^2 = a+b, \end{aligned}$$

uma vez que $a \neq b$. Também,

$$
\begin{aligned}
&P(a) - aP'(a) = P(b) - bP'(b) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3a^4 - 4a^3 - a(12a^3 - 12a^2) = 3b^4 - 4b^3 - b(12b^3 - 12b^2) \\
&\Leftrightarrow -9a^4 + 8a^3 = -9b^4 + 8b^3 \\
&\Leftrightarrow 9(a^4 - b^4) = 8(a^3 - b^3) \\
&\Leftrightarrow 9(a^2 + b^2)\cancel{(a+b)}\,\cancel{(a-b)} = 8\cancel{(a^2 + ab + b^2)}\,\cancel{(a-b)} \\
&\Leftrightarrow 9(a^2 + b^2) = 8.
\end{aligned}
$$

Assim, a e b são tais que

$$
\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = a + b \\ 9(a^2 + b^2) = 8 \end{cases}
$$

Substituindo $9(a^2 + b^2) = 8$ na primeira equação, obtemos $9ab + 8 = 9(a + b)$. A segunda equação, por outro lado, pode ser reescrita como $9[(a + b)^2 - 2ab] = 8$ ou, ainda, $9(a + b)^2 - 18ab = 8$. Obtemos, assim, o sistema equivalente

$$
\begin{cases} 9ab + 8 = 9(a + b) \\ 9(a + b)^2 - 18ab = 8 \end{cases}.
$$

As substituições de variável $u = 3a$, $v = 3b$ dão

$$
\begin{cases} uv + 8 = 3(u + v) \\ (u + v)^2 - 2uv = 8 \end{cases}.
$$

Então, $(u + v)^2 - 2[3(u + v) - 8] = 8$, isto é, $t^2 - 6t + 8 = 0$, com $t = u + v$. Resolvendo essa equação do segundo grau, obtemos $u + v = t = 2$ ou $u + v = t = 4$, logo, $uv = -2$ ou $uv = 4$, respectivamente.

A possibilidade $u + v = 4$, $uv = 4$ dá $u = v = 2$, logo, $a = b = 2/3$, o que não é o caso (recorde que $a \neq b$). Portanto, $u + v = 2$ e $uv = -2$, de sorte que $(u,v) = (1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ ou $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. Por simetria, é suficiente analisar o primeiro caso, isto é,

$$
a = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{3}}{3}.
$$

Por fim, conforme vimos acima, os coeficientes da reta tangente são

$$P(a) - aP'(a) = 3a^4 - 4a^3 \quad \text{e} \quad P'(a) = 12(a^3 - a^2).$$

Como

$$a = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3a = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow 9a^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow 81a^4 = (4 + 2\sqrt{3})^2 = 28 + 16\sqrt{3},$$

temos

$$3a^4 - 4a^3 = \frac{28 + 16\sqrt{3}}{27} - 4\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{9}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

e

$$12a^2(a-1) = 12\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{9}\right)\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{8}{9}.$$

□

Observação 7. *Ainda em relação à solução do exemplo anterior, o leitor habituado com a aritmética dos polinômios provavelmente percebeu um atalho para ir da hipótese "$(x-a)^2$ e $(x-b)^2$ dividem $P(x) - (mx + n)$" à tese "$(x-a)^2(x-b)^2$ divide $P(x) - (mx+n)$":* se dois polinômios primos entre si (*como o são $(x-a)^2$ e $(x-b)^2$*) dividem um terceiro polinômio, então o produto daqueles dois divide o último.

Para o exemplo final, diremos que um polígono $\mathcal{P}$ *circunscreve* o gráfico G de uma função se as retas suportes dos lados de $\mathcal{P}$ tangenciarem G (vide figura 5).

Para acompanhar a solução do exemplo, talvez convenha ao leitor recordar o *teorema do valor intermediário* (TVI), primeiro resultado da última aula do módulo de funções contínuas, juntamente com o corolário 2 que segue, garantindo que funções contínuas transformam intervalos em intervalos.

Além disso, vale a pena relembrar a fórmula da derivada de uma função racional (apresentada na proposição 8 da aula

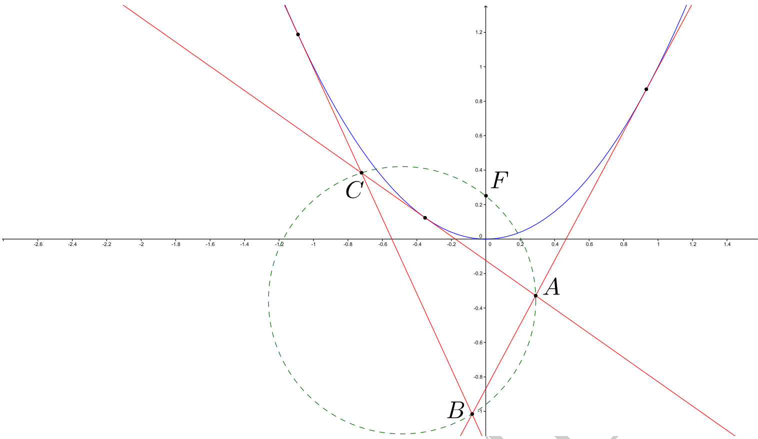

Figura 5: um triângulo ABC circunscrevendo uma parábola.

Funções Racionais do módulo *Leis do Limite - Parte 2*): se p, q são polinômios e a é um ponto no domínio da função racional $f = p/q$, então f é derivável em a e

$$f'(a) = \frac{p'(a)q(a) - p(a)q'(a)}{q(a)^2}. \tag{10}$$

Exemplo 8.

(*i*) *Prove que existe um quadrado circunscrevendo o gráfico da função* $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$*, definida por* $f(x) = x^2/(x^2 - 1)$*. (Veja a figura 6.)*

(*ii*) *Mostre que nenhum retângulo circunscreve o gráfico da função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = x/(x^2 + 1)$*.*

Solução. Para o item (i), começaremos calculando a derivada da função par f. Pela fórmula (10), temos, para cada número real $x \neq \pm 1$,

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2 - 1) - x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Daí, segue que f', definida em $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, é uma função ímpar e contínua.

Além disso, é fácil verificar as seguintes igualdades:

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = -\infty \ \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0. \tag{11}$$

Como f' é negativa em $(1, +\infty)$, esses limites, juntamente com o corolário do TVI citado acima, garantem que a imagem da restrição $f'_{|(1,+\infty)}$ é o intervalo $(-\infty,0)$. Em particular, existe algum $b > 1$ tal que $f'(b) = -1$.

Por outro lado, sendo $f'(0) = 0$, um argumento nos moldes do parágrafo anterior assegura que f' aplica o intervalo $[0,1)$ sobre o intervalo $(-\infty,0]$. Logo, existe $a \in (0,1)$ satisfazendo $f'(a) = -1$.

Se r e s são as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissas a e b, respectivamente, então essas retas são paralelas à bissetriz dos quadrantes pares.

Por simetria, se $\overline{r}$ e $\overline{s}$ são as retas simétricas de r e s com respeito ao eixo das ordenadas, então essas retas são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares e tangentes, respectivamente, ao gráfico de f nos pontos de abscissas $-a$ e $-b$. Consequentemente, se A, B, C e D são os pontos de interseção dos pares de retas $(r,\overline{r}), (s,\overline{r}), (s,\overline{s})$ e $(r,\overline{s})$, é claro que $ABCD$ é um retângulo. Todavia, sendo A, C pontos do eixo OY e D o simétrico de B com relação a OY, as diagonais de $ABCD$ são perpendiculares, ou seja, $ABCD$ é um quadrado.

Para finalizar, provaremos que nenhum retângulo circunscreve o gráfico da função g do item (ii). Com efeito, utilizando mais uma vez a fórmula (10), obtemos

$$g'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Observando que

$$-1 < g'(x) \leq 1 \tag{12}$$

para cada real x, temos a

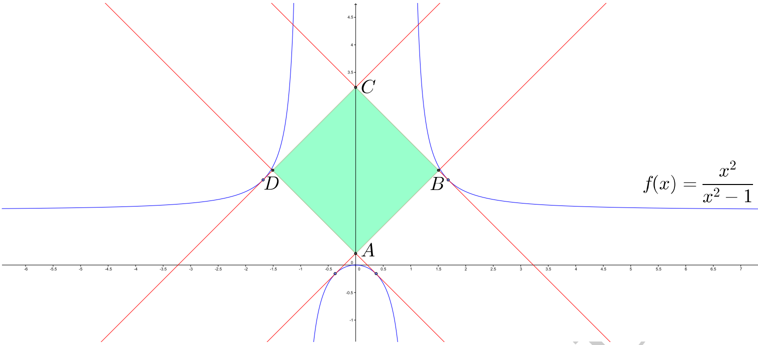

Figura 6: exemplo 8, (i).

Afirmação: quaisquer duas retas tangentes ao gráfico de g não são perpendiculares.

De fato, as desigualdades em (12) dizem que o ângulo orientado θ, medido do eixo das abscissas até uma reta tangente ao gráfico de g, satisfaz $-45° < \theta \leq 45°$, de onde se conclui que o ângulo entre duas tangentes (ao gráfico de g) é sempre menor que $90°$.

Tendo verificado a afirmação, vemos que qualquer quadrilátero $\mathcal{Q}$ que circunscreva o gráfico de g tem ângulos internos incongruentes ao ângulo reto. Em particular, $\mathcal{Q}$ não pode ser um retângulo. $\square$

Dicas para o Professor

O argumento apresentado na primeira solução do exemplo 6 permite estabelecer o seguinte fato: *os gráficos das funções polinomiais f e g são tangentes em um ponto de abscissa a se, e só se, $p(x) := g(x) - f(x)$ é divisível por $(x - a)^2$.* Nesse caso, dizemos que a é uma raiz de multiplicidade ≥ 2 do polinômio p (vide página 4 da aula *Funções Racionais*), o que equivale às relações $p(a) = p'(a) = 0$. (Prove isso!)

A figura (5) sugere um belo resultado, conhecido como *Teorema de Lambert* (veja o artigo 44 da referência [6]): *se um* *triângulo circunscre uma parábola, então o círculo circunscrito a esse triângulo passa pelo foco da parábola.* Encorajamos o leitor a produzir uma prova analítica desse resultado, muito embora haja um argumento muito elegante, baseado no *teorema de Simson-Wallace* (proposição 3.41 de [5]), permitindo uma demonstração sintética desse teorema (veja o teorema 10.1 da referência [4]).

Para que as soluções dos exemplos propostos nesse material sejam apresentadas em detalhes, sugerimos três ou quatro sessões de 50min.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo, vol.* 1. 6ª ed. LTC, 2018.

3. J. Stewart. *Cálculo, volume* 1. 5ª ed. Thomson, 2006.

4. A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky. *Geometry of Conics*. AMS. 2007.

5. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, vol.* 2*. Geometria Euclidiana Plana.* 2ª ed. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

6. H. Dörrie. 100 *Great Problems of Elementary Mathematics.* Dover, 1965.