Material Teórico - Módulo Estudo de Triângulos - Teorema de Menelaus e Relação de Stewart

Teorema de Menelaus

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

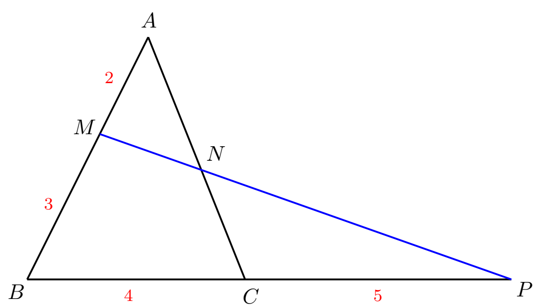
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

02 de Dezembro de 2019

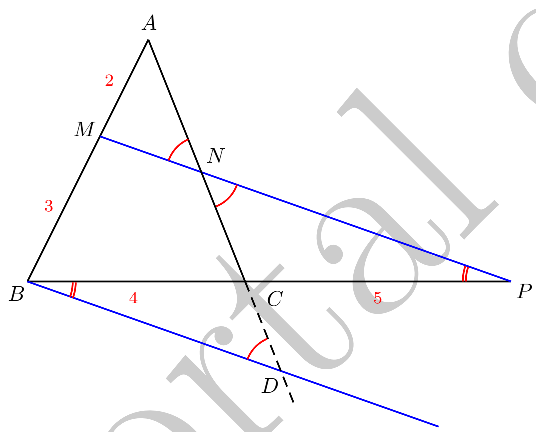
1 O Teorema de Menelaus

Neste material, apresentaremos uma demonstração do teorema de Menelaus, o qual fornece uma condição necessária e suficiente para a colinearidade de três pontos, cada um pertencendo à reta suporte de um dos lados de um triângulo ABC. Com o objetivo de motivar o estudo do teorema de Menelaus, iniciamos com o seguinte

Exemplo 1. *Sejam ABC um triângulo, M um ponto sobre o lado AB, N um ponto sobre o lado AC e P um ponto sobre o prolongamento do lado BC, tais que $\overline{AM} = 2$, $\overline{MB} = 3$, $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CP} = 5$. Calcule a razão $\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}$.*



Solução. Trace a reta paralela ao segmento MN e passando pelo vértice B (acompanhe na próxima figura). Marque o ponto D, de interseção dessa reta com o prolongamento do lado AC.



Observando as retas paralelas $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{ND}$, obtemos que os ângulos $\angle PNC$ e $\angle BDC$ são alternos internos, logo, têm mesma medida. De maneira análoga, mas agora considerando a transversal $\overleftrightarrow{BP}$, concluímos que os ângulos $\angle NPC$ e $\angle DBC$ também têm mesma medida. Assim, os triângulos PNC e BDC são semelhantes. Daí, obtemos

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{4} \Longrightarrow \overline{CD} = \frac{4}{5} \cdot \overline{NC}. \qquad (1)$$

Por outro lado, os ângulos $\angle ANM$ e $\angle ADB$ também têm a mesma medida, pois são ângulos correspondentes. Como $\angle MAN = \angle BAD$, concluímos que os triângulos AMN e ABD são semelhantes. Daí, seque que

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AN}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{2}{5} &\Longrightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{AN}+\overline{NC}+\overline{CD}} = \frac{2}{5}\\
&\Longrightarrow \frac{5}{2} = \frac{\overline{AN}+\overline{NC}+\overline{CD}}{\overline{AN}}\\
&\Longrightarrow \frac{5}{2} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AN}}\\
&\overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{5}{2} = 1 + \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} + \frac{\frac{4}{5}\cdot\overline{NC}}{\overline{AN}}\\
&\Longrightarrow \frac{5}{2} - 1 = \left(1+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{AN}}\\
&\Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{5}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{AN}}\\
&\Longrightarrow \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{9}\\
&\Longrightarrow \frac{\overline{NC}}{\overline{AN}} = \frac{5}{6}\\
&\Longrightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

□

Com as notações do exemplo 1, temos que

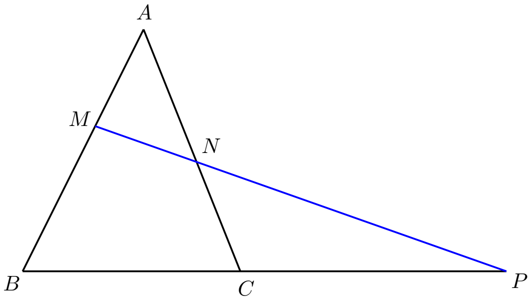
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} &= \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{6}\\
&= \frac{18}{18} = 1.
\end{aligned}$$

Conforme veremos, o fato de o produto de razões do primeiro membro acima ser igual a 1 é a chave para a colinearidade dos pontos M, N e P. Nesse sentido, apresentamos o resultado abaixo, devido a Menelaus de Alexandria, matemático grego que viveu entre os séculos I e II da era cristã.

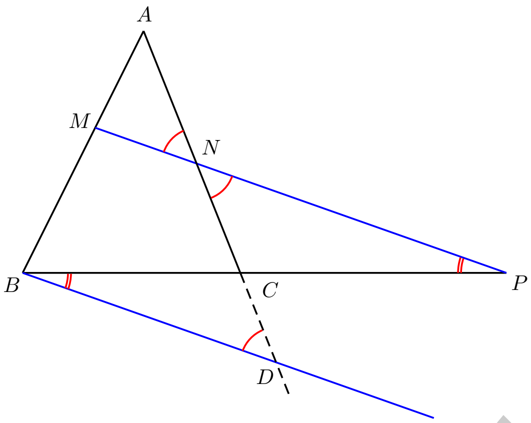
Teorema 2 (Menelaus). *Sejam ABC um triângulo e M, N e P pontos sobre as retas suportes dos lados AB, AC e BC, respectivamente, mas não todos situados sobre os lados de ABC. Então, M, N e P são colineares se, e somente se,*

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\cdot\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1.$$

Prova. Inicialmente, vamos supor que os pontos M, N e P são colineares, com M e N situados sobre os lados AB e AC, respectivamente, e P situado sobre o prolongamento do lado BC (veja a figura a seguir).



Repetindo o raciocínio utilizado na solução do exemplo 1 (acompanhe na próxima figura), traçamos a paralela a $\overleftrightarrow{MN}$ por B, marcamos seu ponto D de interseção com $\overleftrightarrow{AC}$ e concluímos que $PNC \sim BDC$ e $AMN \sim ABD$.



A semelhança $PNC \sim BDC$ implica $\frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}}$. Mas,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CD}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}} &\Longrightarrow \frac{\overline{DN} - \overline{CN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BP} - \overline{CP}}{\overline{CP}} \\ &\Longrightarrow \frac{\overline{DN}}{\overline{CN}} - \frac{\overline{CN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} - \frac{\overline{CP}}{\overline{CP}} \\ &\Longrightarrow \frac{\overline{DN}}{\overline{CN}} - 1 = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} - 1 \\ &\Longrightarrow \frac{\overline{DN}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \\ &\Longrightarrow \overline{DN} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \overline{CN}.\end{aligned} \tag{2}$$

Por outro lado, de $AMN \sim ABD$, obtemos $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AN}}$. Então, de forma análoga aos cálculos acima, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AN}} &\Longrightarrow \frac{\overline{AM} + \overline{BM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AN} + \overline{DN}}{\overline{AN}} \\ &\Longrightarrow 1 + \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = 1 + \frac{\overline{DN}}{\overline{AN}} \\ &\Longrightarrow \overline{DN} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \overline{AN}.\end{aligned} \tag{3}$$

Agora, igualando as expressões encontradas para $\overline{DN}$ nas equações (2) e (3), obtemos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \cdot \overline{CN} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \overline{AN}$$

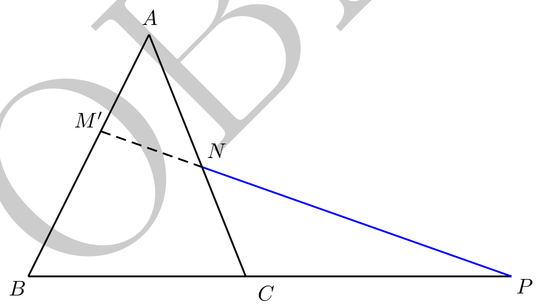
ou, o que é o mesmo,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1.$$

Reciprocamente, sejam M e N pontos situados sobre os lados AB e AC, respectivamente, e P um ponto situado sobre o prolongamento do lado BC, e suponha que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1. \tag{4}$$

Seja M' o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{NP}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ (veja a figura abaixo). Pela parte que já foi provada, temos



$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{M'B}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = 1. \tag{5}$$

Comparando as relações (4) e (5), concluímos que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}}.$$

Por sua vez, isso é o mesmo que

$$\frac{\overline{AB} - \overline{BM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB} - \overline{BM'}}{\overline{BM'}}$$

ou, ainda,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} - 1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM'}} - 1.$$

Então, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BM'}}$, logo, $\overline{BM} = \overline{BM'}$. Mas, como M e M' estão situados sobre o lado AB, isso acarreta que $M = M'$. Portanto, $M = M'$, N e P são colineares. □

A partir de agora, apresentaremos algumas aplicações do teorema de Menelaus.

Exemplo 3. *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Se D é o pé da bissetriz externa relativa ao vértice A e E e F são os pés das bissetrizes internas relativas aos vértices B e C, respectivamente, prove que os pontos D, E e F são colineares.*

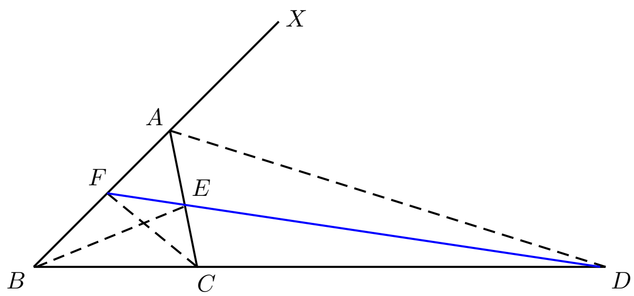
Prova. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} > \overline{AC}$ (acompanhe na figura a seguir). Pelo teorema do ângulo externo, temos

$$C\widehat{A}X = A\widehat{B}C + A\widehat{C}B = \widehat{B} + \widehat{C},$$

logo,

$$\begin{aligned} C\widehat{A}D + A\widehat{C}D &= \frac{1}{2}(\widehat{B} + \widehat{C}) + (180^\circ - \widehat{C}) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{B}) \\ &< 180^\circ. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto D está realmente situado à direita do vértice C, como na figura.



Agora, utilizando o teorema das bissetrizes (externas e internas), obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}},$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

e

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Substituindo tais relações no produto $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} &= \frac{\cancel{\overline{AC}}}{\cancel{\overline{CB}}} \cdot \frac{\cancel{\overline{BA}}}{\cancel{\overline{AC}}} \cdot \frac{\cancel{\overline{BC}}}{\cancel{\overline{AB}}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema de Menelaus, concluímos que os pontos D, E e F são colineares. $\square$

Exemplo 4. *Sejam ABC um triângulo e D e E pontos sobre os lado BC e AB, respectivamente, tais que $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3}$ e $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$. Denotemos por F o ponto de interseção das cevianas AD e CE. Calcule o valor da soma*

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}}.$$

Solução. Iniciamos observando que

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AE} + 3\overline{AE} = 4\overline{AE},$$

ou seja,

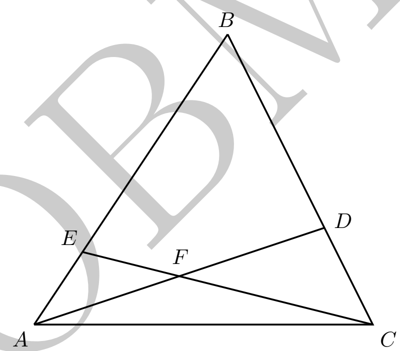
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = 4;$$

também,

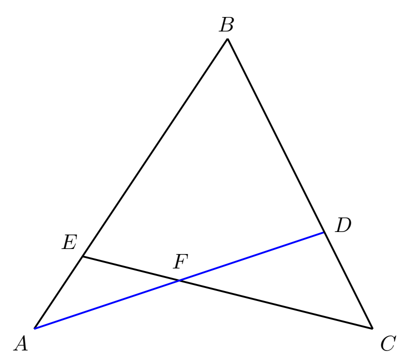
$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{CD} = 2\overline{CD} + \overline{CD} = 3\overline{CD},$$

logo,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = 3.$$



Agora, aplicando o torema de Menelaus ao triângulo CBE (considerando a colinearidade dos pontos A, F e D), obtemos



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1$$

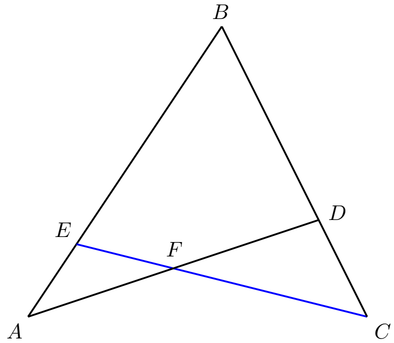
ou, o que é o mesmo,

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}} = 1.$$

Então,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{2}.$$

De modo inteiramente análogo, também podemos aplicar o teorema de Menelaus ao triângulo ABD (considerando os pontos colineares C, F e E).



Assim fazendo, obtemos

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FA}} = 1,$$

o que acarreta

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FA}} = 1,$$

logo,

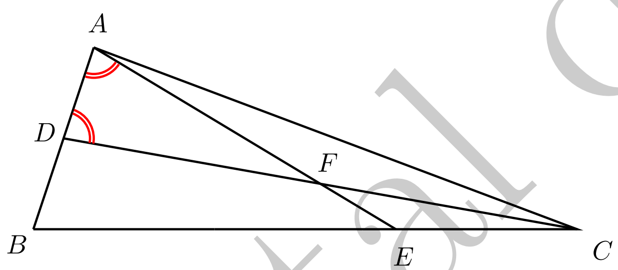
$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

$\square$

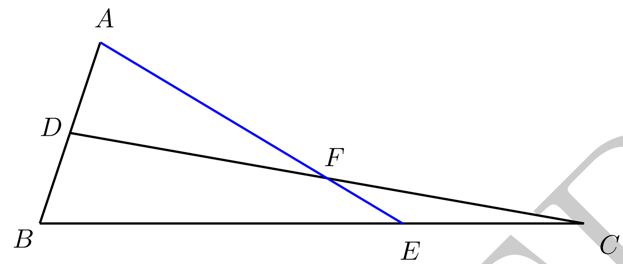
Exemplo 5. *Na figura abaixo,* $\overline{AD} = \overline{BD}$*,* $\overline{BE} = 2\overline{CE}$ *e* $F\widehat{D}A = F\widehat{A}D$*. Calcule* $B\widehat{A}C$*.*



Solução. Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo BCD (observando a colinearidade dos pontos E, F e A) e utilizando as hipóteses dadas no enunciado, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BA}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}} = 1 &\Longrightarrow \frac{\overline{AD} + \overline{BD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{2\overline{CE}} = 1\\ &\Longrightarrow \frac{2\overline{AD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{CE}}{2\overline{CE}} = 1\\ &\Longrightarrow 2 \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} \cdot \frac{1}{2} = 1\\ &\Longrightarrow \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = 1.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\overline{DF} = \overline{FC}$.



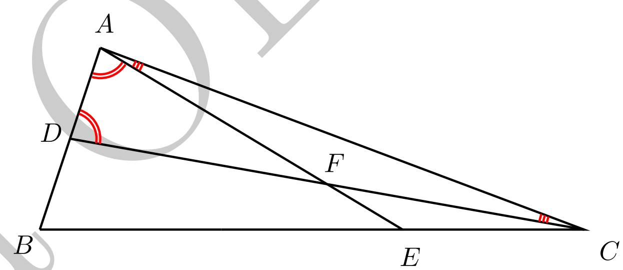
Por outro lado, como $F\widehat{D}A = F\widehat{A}D$, temos que ADF é isósceles de base AD, logo, $\overline{AF} = \overline{DF}$. Então,

$$\overline{AF} = \overline{DF} = \overline{FC},$$

logo, o triângulo ACF é isósceles é isósceles de base AC.

Fazendo $F\widehat{D}A = F\widehat{A}D = \alpha$ e $F\widehat{C}A = F\widehat{A}C = \beta$ (acompanhe na figura a seguir), temos por um lado que

$$B\widehat{A}C = F\widehat{A}D + F\widehat{A}C = \alpha + \beta.$$



Por outro lado, a soma dos ângulos internos do triângulo ACD (que vale $180°$) é igual a

$$\begin{aligned}C\widehat{D}A + D\widehat{A}C + A\widehat{C}D &= \alpha + (\alpha + \beta) + \beta\\ &= 2(\alpha + \beta).\end{aligned}$$

Então, $2(\alpha + \beta) = 180°$, de sorte que

$$B\widehat{A}C = \alpha + \beta = 90°.$$

$\square$

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50 minutos para expor todo o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que, antes de apresentarem a demonstração do teorema de Menelaus, ressaltem a ideia utilizada na solução do exemplo 1, pois ela é repetida na demonstração do teorema. Por sua vez, é importante que a demonstração do teorema seja apresentada com todos os detalhes, para que não restem dúvidas e para enfatizar o caráter lógico-dedutivo da Matemática. Também recomendamos que, ao apresentarem os demais exemplos, os professores chamem a atenção dos alunos para os momentos em o teorema de Menelaus é utilizado, pois isso faz com que os alunos percebam a importância desse resultado.

Finalmente, recomendamos que os professores façam uma breve revisão sobre os teoremas do ângulo externo e das bissetrizes, pois eles são utilizados na solução do exemplo 3.

As referências listadas a seguir trazem outros exemplos e aplicações dos resultados apresentados neste material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. A. Caminha. *Geometria.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

3. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.