Material Teórico - Módulo Números Complexos - Forma Algébrica

Forma algébrica dos números complexos

Terceiro Ano do Ensino Médio

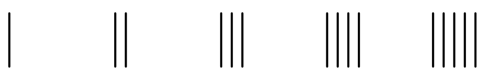
Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

22 de março de 2020

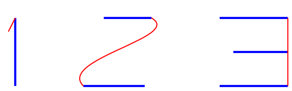
1 Introdução

Nosso objetivo é apresentar o conjuntos dos *números complexos*. Este conjunto, por muitos considerado estranho, acabou ganhando também o infame título de conjunto dos *números imaginários*. Antes de dizer algo sobre ele, vamos contextualizar sua criação e discutir sobre outros conjuntos de números menos estranhos. Será que os números complexos são mesmo apenas fruto de nossa imaginação? Nós os inventamos ou os descobrimos?

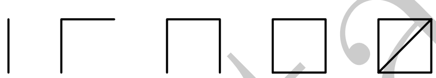
É difícil falar sobre números sem relacioná-los ao processo de contagem. Há evidências de que mesmo na Pré-História, há mais de 35 mil anos, já se utilizavam marcações (conhecidas como marcas de Tally) para representar quantidades. Por exemplo, os números de 1 a 5, podem ser representados como na figura abaixo.



É fato que tais marcas acabaram sendo incorporadas nas mais diversas culturas de diferentes formas, pelo menos no que diz respeito à representação dos números um, dois e três. Por exemplo, em algarismos romanos eles são representados por I, II e III; no Kanji, caracteres da língua Japonesa, eles são representados por: 一, 二, 三. Mesmo nos três primeiros algarismos indo-arábicos 1, 2, 3, etc, que hoje são utilizados na mais diversas línguas (inclusive no Português), há certa influência das marcas de Tally:



Ainda hoje, é comum usarmos símbolos como os da figura abaixo para representar quantidades de 1 a 5.



A partir do número quatro, os símbolos passam a diferir enormemente, cada civilização utilizando diferentes símbolos e maneiras de combiná-los a fim de compor a representação de um determinado número. Não entraremos em detalhes sobre as diferentes representações dos números naturais, já que isso é objeto do módulo "Sistemas de Numeração e Paridade" da seção "Tópicos Adicionais". Contudo, podemos afirmar seguramente que o conceito de número é universal e o entendemos desde os nossos primeiros anos de vida.

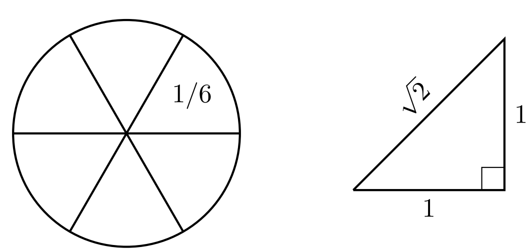
O conjunto dos números naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$, corresponde aos números positivos associados a quantidades inteiras de objetos (independentemente dos símbolos que sejam usados para eles): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Outro número que faz parte de nosso dia a dia mas, surpreendentemente, entra na história bem mais recentemente é o zero. O primeiro uso documentado do número zero ocorre apenas no ano 628 depois de Cristo, no trabalho do matemático indiano Brahmagupta, onde ele trata zero como um numeral e discute suas propriedades aritméticas (soma, subtração, multiplicação e divisão por outros números). Não devemos confundir esse tipo de uso com o fato de que, bem antes disso, já nas antigas Babilônia e Egito, o símbolo zero era utilizado, mas apenas como marcador em sistemas posicionais. Ou seja, ele não era percebido como um número.

Observação 1. *É muito comum livros de ensino fundamental, médio ou superior incluírem o zero no conjunto dos números naturais (isso é também o caso do padrão ISO 80000-2). Ou seja, vários autores definem $\mathbb{N}$ como o conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. É importante salientar que isso é apenas um convenção e não há um consenso (um motivo óbvio para escolher uma via ou a outra). O mais importante é que, uma vez tomada essa escolha, o livro mantenha sua decisão ao longo de todo o texto, para não gerar confusão. Para o aluno, é importante conhecer a decisão tomada pela autor. Aqui, não incluímos o zero em $\mathbb{N}$ por estarmos considerando uma perspectiva histórica.*

Por outro lado, números negativos já eram utilizados pelos chineses desde 100 a 50 anos antes de Cristo. Apesar desses números serem mais abstratos, até mesmo quando comparados a números fracionários (não é possível contar -3 maçãs, mas é possível contar $1/2$ maçã), eles são aceitos de forma bastante natural por sua interpretação contábil, representando a noção de dívida. O conjunto dos número inteiros, incluindo os negativos, o zero e os positivos, é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Assim, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

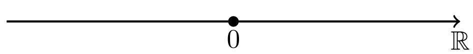
Outro conjunto simples de definir é o conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, que é o conjunto de todas as frações de números inteiros com denominador diferente de zero, ou seja, $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. É provável que o conceito de frações (positivas) entre 0 e 1, vistas como maneiras de medir partes de um todo, também tenha sido utilizado deste a Pré-História. Mais tarde, na época dos antigos Egípcios, já existia, inclusive, uma representação simbólica para as certas frações.



Antes mesmo da chegada dos números negativos, os números *irracionais* já causavam alguma estranheza. Alguns irracionais positivos podem ser usados para medir (comprimentos, áreas, volumes, etc), mas eles não podem ser representados por frações de inteiros. Por exemplo, o número $\sqrt{2}$. Ainda assim, todo número irracional pode ser representando por uma sequência de números racionais, tal que os termos da sequência aproximam o número irracional. Juntos, os racionais e os irracionais, positivos e negativos, formam o conjunto dos números *reais*, representado por $\mathbb{R}$. Apesar desses números serem utilizados desde a antiguidade, uma definição formal moderna[1] do conjunto dos números reais só veio se concretizar muito recentemente, em 1871, pelo matemático Georg Cantor. O conjunto dos reais inclui vários outros elementos famosos, tais como π e e.

Pensando na representação decimal de um número real (por exemplo, $3/2 = 1{,}5$ e $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$), os racionais são aqueles que podem ser representados por uma quantidade finita de algarismos ou por uma quantidade infinita de algarismos que tenha uma "cauda periódica" (por exemplo, $4{,}2303030\ldots$ onde o 30 se repete indefinidamente); as demais representações decimais (isto é, aquelas com um número infinito de algarismos, sem bloco de algarismos que se repita) correspondem aos irracionais.

Um fato importante sobre o conjunto dos números reais é que, se desenharmos uma reta orientada e escolhermos um ponto nesta reta, onde marcaremos o número zero, a cada ponto da reta podemos fazer corresponder um único número real.



Até agora temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e cada expansão de um conjunto para um maior aconteceu pela necessidade de resolver um novo problema. O conjunto $\mathbb{R}$ é o universo de números dentro do horizonte visível de quase todo o Ensino Médio. Ele é grande o bastante para resolver *quase* todas as necessidades do nosso dia a dia. Mas, como o leitor deve suspeitar, essa história não acaba aqui. Conforme veremos na seção seguinte, certos problemas (algébricos) só possuem solução se utilizarmos o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Eles também possuem importantes aplicações em Geometria (como veremos no módulo seguinte) e em Física.

A Figura 1 nos mostra o diagrama de Venn de todos esses conjuntos e lista alguns de seus elementos.

2 A criação dos números complexos

Pensamos na **Álgebra** como a matemática que resulta ao substituirmos os números por símbolos (indeterminadas), em contraste com a *Aritmética*, que é o estudo dos números por si só. A pergunta "Quanto vale 3×7?" é da Aritmética, enquanto a pergunta "Quais os valores de x e y para que

[1] Tal definição formal do conjunto dos números reais exige conceitos que não costumam ser abordados no Ensino Médio e, por conseguinte, fogem ao escopo deste texto.

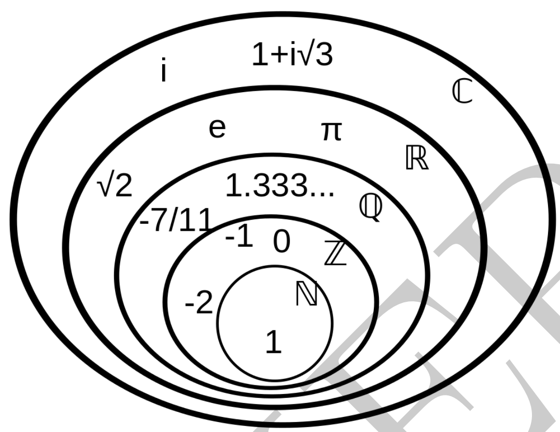


Figura 1: conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com alguns de seus elementos. Fonte (Wikimedia Commons): `commons.wikimedia.org/wiki/File:NumberSetinC.svg`

$x + y = 10$ e $xy = 21$?" é da Álgebra. Em níveis mais avançados, tais símbolos da Álgebra nem precisam representar números, mas quaisquer objetos matemáticos com os quais possamos realizar operações (somar, multiplicar, etc), como por exemplo vetores, matrizes ou funções.

Do ponto de vista da Álgebra, a história da seção anterior pode ser contada através de equações. A equação $x - 5 = 0$ possui como solução o número natural 5. Contudo, mantendo o universo como $\mathbb{N}$, a equação $x + 5 = 0$ já não teria solução. Sua solução é o número -5, pertencente ao conjunto $\mathbb{Z}$. Seguindo esse raciocínio, à medida que são consideradas equações "mais difíceis", precisamos expandir nosso universo. Veja a tabela:

Equação	**Soluções**	**Conjunto**
$x - 5 = 0$	$x = 5$	$\mathbb{N}$
$x + 5 = 0$	$x = -5$	$\mathbb{Z}$
$2x - 1 = 0$	$x = 1/2$	$\mathbb{Q}$
$x^2 - 2 = 0$	$x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$	$\mathbb{R}$
$x^2 + 1 = 0$	$x = i$ e $x = -i$	$\mathbb{C}$

No caso da equação $2x - 1 = 0$, apesar de todos os seus coeficientes serem números inteiros, ainda assim ela não possui uma solução inteira. Da mesma forma, na equação $x^2 - 2 = 0$, apesar de todos os seus coeficientes serem racionais, suas soluções não são racionais. Por fim, chegamos à equação $x^2 + 1 = 0$. Se tentarmos resolvê-la da mesma forma que as anteriores, obteremos $x^2 = -1$, logo, $x = \sqrt{-1}$ ou $x = -\sqrt{-1}$. O problema é que, ao multiplicar qualquer número real por si mesmo, pela regra dos sinais, obtemos um número real não negativo. Assim $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de forma que não existe um x real tal que $x^2 = -1$. Em outras palavras, em $\mathbb{R}$, não existe $\sqrt{-1}$.

Neste ponto, há duas alternativas: (i) podemos declarar que $x^2 + 1 = 0$ não possui solução e seguir com a vida (seguindo a máxima de que "o que não tem solução, solucionado está”); ou (ii) expandir nosso universo para o conjunto dos números complexos, onde essa equação possui solução (de fato, duas soluções). Fazemos isso criando um novo número, que chamaremos de i e que satisfaz $i^2 = -1$. Veja que, dessa forma, $-i$ é a segunda raiz, já que

$$(-i)^2 = ((-1)i)^2 = (-1)^2\, i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Essa ideia foi introduzida por Cardano, em 1545, mas Cardano possuía apenas uma visão rudimentar de como usar os números complexos. Em 1637, René Descartes é quem passa a chamá-los de números “imaginários”.

A obscuridade em torno desses números só foi resolvida por completo pelo brilhante Johann Carl Friedrich Gauss, em 1831. Gauss afirma, em seu tratado Anzeige von “Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda (Nota sobre a teoria dos resíduos biquadráticos, segundo tratado)”, que boa parte dessa obscuridade foi promovida pela escolha errada do nome:

> Se chamássemos, $+1$, -1 e $\sqrt{-1}$, respectivamente, de unidade direta, inversa e lateral, no lugar de positiva, negativa e imaginária, essa obscuridade ficaria fora de cogitação.

No módulo “Números Complexos – Forma Geométrica”, estudaremos em detalhes o que Gauss quis dizer com isso. O resumo da história é que os números complexos são tão concretos (ou tão abstratos) quanto os números reais, mas eles “não cabem” dentro de uma reta. Precisamos incluir outra dimensão: cada número complexo representa um único ponto sobre um plano.

A grande dificuldade é que não basta apenas criar novos números, artificialmente, toda vez que nos depararmos com uma equação que não possua solução no universo atual. Se fosse assim, seríamos inundados por uma infinidade de números estranhos, cada um com seu próprio significado. O problema maior é que precisamos também estipular como manipular algebricamente esses novos números, ou seja, precisamos definir regras sobre como somar, subtrair, multiplicar, dividir, calcular potências e raízes desses novos números (assim como fazemos ao estudar frações pela primeira vez). E queremos ser econômicos: fazer isso da maneira mais simples possível, para que não seja necessário reaprender toda uma nova Matemática.

Por exemplo, uma vez que temos à disposição o número i, que satisfaz $i^2 = -1$, não precisamos criar outro número para resolver $x^2 = -9$. De fato, basta fazer $x = 3i$, para obter:

$$x^2 = (3i)^2 = 3^2 \cdot i^2 = 9 \cdot (-1) = -9.$$

Assim, $3i$ é uma das raízes de $x^2 = -9$, e podemos verificar que $x = -3i$ é a outra raiz:

$$x^2 = (-3i)^2 = (-1)^2 \cdot 3^2 \cdot i^2 = 1 \cdot 9 \cdot (-1) = -9.$$

Exemplo 2. *Usando o mesmo argumento acima, mostre que para todo número* real positivo a, *temos que a equação* $x^2 = -a$ *possui como raízes os números* $\sqrt{a}\, i$ *e* $-\sqrt{a}\, i$.

Podemos multiplicar o número i por qualquer número real e obter outros números complexos, por exemplo, $2i$, $-5i$, $\sqrt{7}\, i$ ou $\frac{-3}{2}i$. Depois, o resultado também pode ser somado a outro número real, obtendo expressões do tipo: $1+2i$, $-1+\sqrt{3}\, i$, etc. Podemos simplificar expressões do tipo $2i + 3i$, que é o mesmo que $(2+3)i$, ou seja, $5i$. Mas não podemos simplificar $1+2i$ (que é interpretado como 1 unidade real somado a 2 unidades imaginárias e não deve ser confundido com $(1+2)i = 3i$). Em geral, um número complexo é da forma $a+bi$, onde a e b são números reais: a é chamado de parte real e b é chamado de parte imaginária (veja que a parte imaginária é apenas o coeficiente de i e não o termo bi). Representando o conjunto dos números complexos pelo símbolo $\mathbb{C}$, podemos escrever:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Na aula seguinte, estudaremos como podemos manipular os números complexos algebricamente. Uma das grandes fontes de confusão, que fizeram com que os matemáticos durante quase 2 mil anos preferissem seguir a alternativa (i) acima, era a seguinte:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

(Antes de continuar a leitura, tente identificar onde está o erro na expressão acima.)

À primeira vista, parece que a mera existência de i faria com que $1 = -1$, o que é impossível. Onde foi que erramos? Uma análise mais profunda indica que o problema não é a existência de i. O problema é que usamos a regra $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, tomando $a = b = -1$. Porém, essa regra algébrica só vale quando a e b são números *não negativos*.

Observação 3. *Um ponto importante: a equação* $x^2 = 9$ *possui duas raízes, pois* $3^2 = 9$ *e* $(-3)^2 = 9$. *Assim, tanto* 3 *como* -3 *são raízes da equação. Contudo, só existe um número que é igual a* $\sqrt{9}$, *a saber,* $\sqrt{9} = 3$ *pois, por definição, a raiz quadrada de um número positivo é sempre positiva. Por isso, dizemos que as raízes da equação* $x^2 = 9$ *são* $\sqrt{9}$ *e* $-\sqrt{9}$ *ou, de maneira mais curta,* $\pm\sqrt{9}$.

Também temos nem sempre vale $\sqrt{x^2} = x$. *Por exemplo,* $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$, *já que* $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. *Em geral, podemos escrever* $\sqrt{x^2} = |x|$.

Ao escrever expressões do tipo $\sqrt{-9} = \pm 3i$, *estamos, em verdade, abusando da notação com o intuito de dizer que* $(3i)^2 = -9$. *Porém, nem o número* $3i$ *nem o número* $-3i$ *são considerados negativos ou positivos.*

Mas porque se dar ao trabalho de criar todas essas regras para manipulação de complexos, quando poderíamos apenas seguir pensando que equações do tipo $x^2 + 1 = 0$ não possuem solução. Ora, tudo andava bem até que Cardano publicou uma obra com uma fórmula para resolver equações de terceiro grau da forma: $x^3 + px = q$. Essa fórmula havia sido descoberta por Scipione Del Ferro

(1465–1526) e por Nicolo Fontana (1500–1557), mais conhecido pelo seu pseudônimo de Tartaglia (que significa gago, em italiano). Estes dois haviam guardados suas fórmulas a sete chaves, pois nesta época os matemáticos ganhavam a vida participando em disputas de resolução de problemas e, por isso, não podiam divulgar seus métodos. Mas Cardano conseguiu convencer Tartaglia a lhe fornecer a fórmula e a divulgou.

O problema é que toda equação de terceiro grau possui pelo menos uma raiz real (fato que pode ser justificado analisando os gráficos dessa equações, mas não o faremos aqui). Contudo, a fórmula de Cardano, quando aplicada a certas equações, produzia raízes de números negativos. Mais precisamente, para todos p e q reais, Cardano previa que a equação $x^3 + px = q$ possui como raiz o número:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}. \quad (1)$$

Quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$, não há problema: substitui-se os valores de p e q e obtêm-se uma solução. (Em seguida, outra soluções, caso existam, podem ser obtidas fatorando-se o polinômio $f(x) = x^3 + px - q$.) Porém, quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, a fórmula não funcionaria, pois envolveria calcular a raiz quadrada deste número. Mas Cardano ainda queria vencer seus duelos. Por exemplo, considere a equação $x^3 - 15x = 4$. Temos que $p = -15$ e $q = 4$, logo,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{16}{4} - \frac{3375}{27} = 4 - 125 = -121$$

e, assim,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Como $121 = (11)^2$, vamos substituir $\sqrt{-121}$ por $11i$ e obter:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Veremos em aulas futuras que, utilizando álgebra nos complexos, podemos obter $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$ e $\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i$ (não se preocupe em como fazer isso, por enquanto); e com isso teremos que:

$$x = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

De fato, verificamos que 4 é uma das raízes da equação $x^3 - 15x = 4$, já que para $x = 4$ temos

$$x^3 - 15x = 4^3 - 15 \cdot 4 = 64 - 60 = 4.$$

A moral da história é que nem nosso problema original (achar uma raiz da equação $x^3 - 15x = 4$) nem a sua solução ($x = 4$) possuem qualquer relação com a raiz quadrada de números negativos mas, ainda assim, a existência de tais números nos ajuda a resolvê-lo (assumindo que tenhamos aprendido a manipular esses números). Ou seja, eles se apresentam como ferramentas empregadas para um fim específico. Da mesma forma, surpreendentemente, os números complexos também podem ser usados como ferramentas importantes na resolução de problemas de geometria plana (lembre-se de que mencionamos que cada complexo representa um ponto no plano).

Por fim, há outro motivo muito importante para estudar números complexos. De volta à tabela que deu início a esta seção, podemos nos perguntar se não haveria um conjunto ainda maior do que $\mathbb{C}$ para resolver equações polinomiais mais complicadas. A resposta para esse problema também foi dada por Gauss e é tão importante que é chamada de **Teorema Fundamental da Álgebra**. Ele provou que qualquer polinômio de grau n, cujos coeficientes estão em $\mathbb{C}$, sempre possui exatamente n raízes (não necessariamente distintas) em $\mathbb{C}$. Portanto, não há necessidade de criar um conjunto ainda maior, pelo menos pelo simples motivo de precisar resolver equações polinomiais (mas os matemáticos são criativos e arrumam outros motivos . . .).

3 Exercícios

Exemplo 4. *Resolva a equação $x^2 + 25 = 0$ no universo dos números complexos.*

Solução. Temos que

$$x^2 + 25 = 0 \implies x^2 = -25 \implies x^2 = -5^2 \implies x = \pm 5i.$$

□

Exemplo 5. *Resolva a equação $3x^2 + 54 = 0$ no universo dos números complexos.*

Solução. Temos que

$$3x^2 + 54 = 0 \implies 3x^2 = -54 \implies x^2 = -18.$$

Logo, $x = \pm\sqrt{18}\, i = \pm 2\sqrt{3}\, i$ □

Exemplo 6. *Encontre todos os valores de k para que o número complexo $z = 3 + (2k - 1)i$ seja real.*

Solução. Para que isso aconteça, é preciso que a parte imaginária de z seja igual a zero. Assim, devemos ter $2k - 1 = 0$, de sorte que $k = 1/2$. □

Exemplo 7. *Encontre todos os valores de p para que o número complexo $z = (p^2 - 2p + 1) + 5i$ seja imaginário puro.*

Solução. Ser imaginário puro significa que a parte real de z deve ser igual a zero. Ou seja, devemos ter que $p^2 - 2p + 1 = 0$. O discriminante dessa equação de segundo grau é $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$. Logo, a equação possui uma única raiz:

$$p = \frac{-(-2) + \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Assim, p tem que ser igual a 1. □

Exemplo 8. *Encontre todos os valores reais de m para que o número complexo $z = 3m + (m^2 - 5m + 6)i$ não seja real.*

Solução. Para que ele não seja real, sua parte imaginária deve ser diferente de zero, ou seja, $m^2 - 5m + 6 \neq 0$. Se resolvermos a equação de segundo grau

$$m^2 - 5m + 6 = 0,$$

obtemos os valores que não são permitidos para m. O discriminante dessa equação é $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Logo, os possíveis valores de m são obtidos fazendo:

$$m = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Logo, $m = (5+1)/2 = 6/2 = 3$ ou $m = (5-1)/2 = 4/2 = 2$. Concluímos que, para que z não seja real, m pode assumir qualquer valor exceto 2 e 3. □

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em um encontro de 50 min. O objeto é apenas introduzir o conceito de número complexo, focando na sua forma algébrica. Mais detalhes do que exploramos aqui podem ser obtidos nas referências a seguir.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*. SBM, Rio de Janeiro, 2016.

2. Complex Numbers, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`

3. Number, página online da Wikipedia (em inglês), `https://en.wikipedia.org/wiki/Number`.