# Material Teórico - Módulo: Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

## Módulo e Produto Escalar - Parte 1

### Terceiro Ano - Médio

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

# 1 Módulo de um vetor

O módulo de um vetor $\overrightarrow{v}$ representado pelo segmento orientado $AB$ é o comprimento desse segmento. Escrevemos $|\overrightarrow{v}|$ para indicar o módulo do vetor $\overrightarrow{v}$, de sorte que $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$.

Se $\overrightarrow{v} = (a, b)$, então $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. De fato, escolhendo como representante de $\overrightarrow{v}$ o segmento orientado $OP$, com origem na origem do plano cartesiano, vemos que $|\overrightarrow{v}| = \overline{OP}$ é o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo $OaP$ (veja a figura 1).

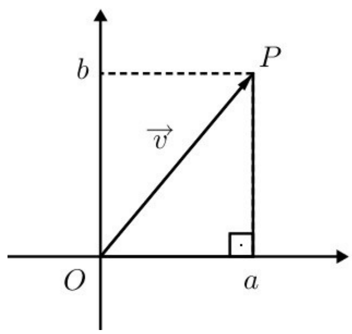


Figura 1: calculando o módulo de um vetor no plano.

Assim,

$$|\overrightarrow{v}| = \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

onde $P = (a, b)$. Como $O = (0, 0)$, temos que $\overrightarrow{v} = (a - 0, b - 0) = (a, b)$.

Se $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ é um vetor no espaço, então

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{2}$$

Para verificar a validade dessa igualdade, novamente consideremos o ponto $P = (a, b, c)$ escolhido de modo que o segmento orientado $OP$, com $O = (0, 0, 0)$, represente o vetor $\overrightarrow{v}$. Dessa forma, $\overrightarrow{v} = (a - 0, b - 0, c - 0) = (a, b, c)$.

Na figura 2, a reta $PP'$ é paralela ao eixo $z$ e intersecta o plano $xy$ no ponto $P'$. Dizemos que $P'$ é a projeção ortogonal de $P$ sobre o plano $xy$.

Também, as retas $P'Q$ e $P'R$ são paralelas, respectivamente, aos eixos $y$ e $x$. Dizemos que $Q$ é a projeção ortogonal do ponto $P'$ sobre o eixo $x$ e que $R$ é a projeção ortogonal do ponto $P'$ sobre o eixo $y$.

O quadrilátero $OP'PS$ é um retângulo, logo $\overline{PP'} = \overline{OS}$. Os triângulos $OPP'$ e $OQP'$ são retângulos, de modo que podemos aplicar o Teorema de Pitágoras duas vezes, obtendo:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{PP'}^2 \quad \text{e} \quad \overline{OP'}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP'}^2.$$

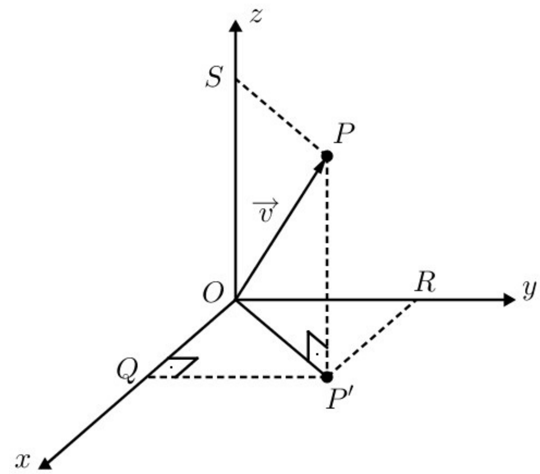


Figura 2: calculando o módulo de um vetor no espaço.

Logo,

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP'}^2 + \overline{PP'}^2.$$

Mas, como $\overline{QP'} = \overline{OR}$ e $\overline{PP'} = \overline{OS}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 &= \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

A seguir, vamos coletar algumas propriedades relavantes do módulo de um vetor. Faremos as verificações para vetores no espaço, mas o caso em que o vetor está no plano é inteiramente análogo.

> (1) $|\overrightarrow{v}| \geq 0$ e $|\overrightarrow{v}| = 0$ se, e somente se, $\overrightarrow{v} = 0$.

Seja $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$. Como $a, b$ e $c$ são números reais, temos $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ se, e somente se, $a = b = c = 0$. Assim, $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0$ e $|\overrightarrow{v}| = 0$ se, e somente se, $a = b = c = 0$, ou seja, se e somente se $\overrightarrow{v} = (0, 0, 0)$.

> (2) Se $\alpha \in \mathbb{R}$, então $|\alpha \overrightarrow{v}| = |\alpha||\overrightarrow{v}|$, onde $|\alpha|$ é o valor absoluto de $\alpha$.

Novamente, escrevamos $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$. Então, $\alpha \overrightarrow{v} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ e

$$\begin{aligned} |\alpha \overrightarrow{v}| &= \sqrt{(\alpha a)^2 + (\alpha b)^2 + (\alpha c)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= |\alpha||\overrightarrow{v}|. \end{aligned}$$

> (3) (Desigualdade triangular) $|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|$.

Esta é a mais importante propriedade do conceito de módulo de um vetor, mas também é aquela cuja demonstração exige um pouco mais de trabalho. Vamos demonstrá-la ainda nesta aula. Por enquanto, cabe observar que o nome "desigualdade triangular" se deve ao fato de, em geral, dois vetores e sua soma formarem um triângulo (veja a figura 3) e que o comprimento de um dos lados de um triângulo não pode ser maior do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Outro modo de dizer isso é: se (nas notações da figura 3) se deseja ir do ponto $A$ ao ponto $C$, então a distância percorrida ao longo do segmento $AC$ é menor do que ao longo do caminho poligonal $ABC$.

Sempre que estudamos uma desigualdade, é conveniente sabermos quando essa desigualdade é, em verdade, uma igualdade. Foi isso que fizemos na propriedade (1). No caso da desigualdade triangular, ocorre a igualdade $|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{v}|+|\overrightarrow{w}|$ se, e somente se, o triângulo $ABC$ da figura 3 é *degenerado*, isto é, os pontos $A, B$ e $C$ são colineares, com o ponto $B$ situado entre $A$ e $C$ (ou, de outro modo, quando os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ têm a mesma direção e o mesmo sentido).

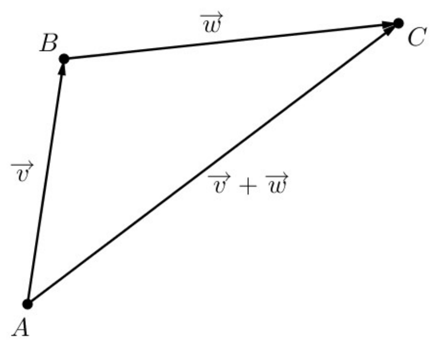


Figura 3: dois vetores e sua soma.

O exemplo a seguir ilustra como a desigualdade triangular pode ser aplicada na resolução de um problema em que se deseja minimizar uma distância.

**Exemplo 1.** *Pedro está no ponto $A$ e deseja ir à sua casa, situada no ponto $B$, mas antes precisa pegar água no rio, representado na figura 4 pela reta horizontal $\ell$. Em que ponto $P$ do rio Pedro deve buscar água de modo que o caminho por ele percorrido tenha o menor comprimento possível?*

**Solução:** trace a reta que passa por $B$ e é perpendicular à reta $\ell$. Sobre essa reta, marque o ponto $B'$ de modo que a reta $\ell$ seja a mediatriz do segmento $BB'$ (veja a figura

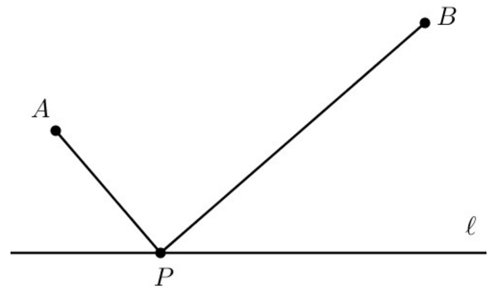


Figura 4: onde buscar água para que a distância percorrida seja mínima?

5). Seja $P$ o ponto de interseção do segmento $AB'$ com a reta $\ell$.

Vamos mostrar, a seguir, que o ponto $P$ é onde Pedro deve buscar a água no rio para que a distância por ele percorrida seja mínima, ou seja, para que a soma $\overline{AP}+\overline{PB}$ seja mínima. Isso significa dizer que, para qualquer ponto $Q \in \ell$, devemos provar que

$$\overline{AP}+\overline{PB} \leq \overline{AQ}+\overline{QB},$$

com a igualdade ocorrendo na desigualdade acima se, e somente se, $Q = P$.

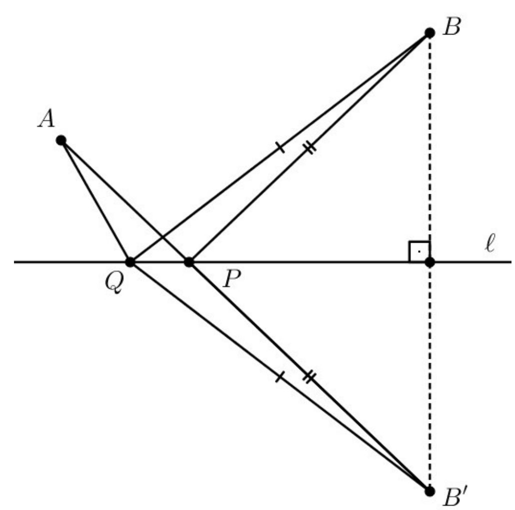


Figura 5: Solução para o problema do rio.

Para o que falta, pela construção do ponto $B'$, os triângulos $BB'P$ e $BB'Q$ são isósceles, logo, $\overline{BP} = \overline{PB'}$ e $\overline{QB} = \overline{QB'}$. Assim,

$$\overline{AP}+\overline{PB} = \overline{AP}+\overline{PB'} = \overline{AB'}.$$

Por outro lado, a desigualdade triangular aplicada ao triângulo $AQB'$ nos diz que $\overline{AB'} \leq \overline{AQ}+\overline{QB'}$. Assim,

$$\overline{AP}+\overline{PB} = \overline{AB'} \leq \overline{AQ}+\overline{QB'} = \overline{AQ}+\overline{QB};$$

além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo $AQB'$ é degenerado, ou seja, $A, Q$ e $B'$ são colineares. Mas isso significa que $Q = P$. $\square$

# 2 Produto escalar de dois vetores

Consideremos dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$. Podemos expressar esses vetores em termos de suas coordenadas, digamos: $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$, se forem vetores em $\mathbb{R}^2$, ou $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, se forem vetores em $\mathbb{R}^3$.

O **produto escalar** de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ é definido por

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2, \tag{3}$$

se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores em $\mathbb{R}^2$, e

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3, \tag{4}$$

se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores em $\mathbb{R}^3$.

Assim como fizemos anteriormente, vamos considerar apenas o caso em que os vetores estão em $\mathbb{R}^3$, sendo o caso em $\mathbb{R}^2$ análogo.

De imediato, temos as seguintes propriedades algébricas do produto escalar:

$$\boxed{\text{(I) } \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}.}$$

De fato, para $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \\ &= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pertencem a $\mathbb{R}^2$, a demonstração é análoga.

$$\boxed{\text{(II) } \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}.}$$

Realmente, se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, então

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) \\ &= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2 + u_3 v_3 + u_3 w_3 \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 \\ &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}. \end{aligned}$$

Novamente aqui, o caso de dimensão 2 pode ser demonstrado de forma análoga.

$$\boxed{\text{(III) } (\alpha \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot (\alpha \overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}).}$$

Para demonstrar essa propriedade, sejam $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Temos:

$$\begin{aligned} (\alpha \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} &= (\alpha u_1) v_1 + (\alpha u_2) v_2 + (\alpha u_3) v_3 \\ &= u_1(\alpha v_1) + u_2(\alpha v_2) + u_3(\alpha v_3) \\ &= \overrightarrow{u} \cdot (\alpha \overrightarrow{v}) \\ &= \alpha(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ &= \alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

Mais uma vez, o caso de dimensão 2 é análogo.

Continuando, vamos estudar agora as propriedades geométricas do produto escalar. A primeira observação diz respeito a uma conexão entre produto escalar e módulo: se $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = |\overrightarrow{v}|^2.$$

Assim, podemos escrever

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}. \tag{5}$$

A equação acima nos diz que, a partir da noção de produto escalar, podemos obter o módulo de um vetor. Logo, o produto escalar nos fornece uma modo de medir distâncias.

A seguir, vamos mostrar que a noção de produto escalar também nos permite medir ângulos. O resultado fundamental que nos permite fazer isso é a **desigualdade de Cauchy**:

$$\boxed{-|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| \le \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \le |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|.}$$

Parece estranho chamar a expressão acima de desigualdade (no singular). Para remediar esse problema, podemos escrevê-la como

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \le |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|,$$

onde o par de barras verticais que aparece à esquerda indica o valor absoluto do número real $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$, enquanto cada um dos pares de barras verticais que aparecem à direita indica o módulo de um vetor.

Vamos verificar a validade da desigualdade de Cauchy em $\mathbb{R}^3$ (aqui também, o caso de $\mathbb{R}^2$ é completamente análogo). Assumindo que $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$, temos a desigualdade

$$(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 + (v_1 w_3 - v_3 w_1)^2 + (v_2 w_3 - v_3 w_2)^2 \ge 0,$$

válida porque quadrados de números reais são sempre não negativos. Observe que essa desigualdade se torna uma igualdade se, e somente se,

$$v_1 w_2 = v_2 w_1, \quad v_1 w_3 = v_3 w_1 \quad \text{e} \quad v_2 w_3 = v_3 w_2;$$

supondo que nenhuma coordenada de $\overrightarrow{w}$ seja nula, as igualdades acima podem ser reescritas como

$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3} = \alpha,$$

o que por sua vez é equivalente a afirmar que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{w}$.

Agora, desenvolvendo os quadrados, a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2 + v_1^2w_3^2 + v_3^2w_1^2 + v_2^2w_3^2 + v_3^2w_2^2 \geq$$

$$\geq 2v_1w_2v_2w_1 + 2v_1w_3v_3w_1 + 2v_2w_3v_3w_2.$$

Somando $v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2$ a ambos os membros e rearranjando as parcelas, concluímos que a última desigualdade acima é equivalente a

$$\begin{aligned}
&(v_1^2w_1^2 + v_1^2w_2^2 + v_1^2w_3^2) + (v_2^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_2^2w_3^2) + \\
&\quad + v_3^2w_1^2 + v_3^2w_2^2 + v_3^2w_3^2 \geq \\
&\geq v_1^2w_1^2 + v_2^2w_2^2 + v_3^2w_3^2 \\
&\quad + 2v_1w_2v_2w_1 + 2v_1w_3v_3w_1 + 2v_2w_3v_3w_2,
\end{aligned}$$

ou ainda a

$$(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \geq (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2.$$

A última desigualdade acima é claramente equivalente a

$$|\overrightarrow{v}|^2|\overrightarrow{w}|^2 \geq (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})^2.$$

Então, extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, obtemos a desigualdade de Cauchy, como enunciada acima.

A desigualdade de Cauchy é importante, primeiro porque com ela poderemos enfim demonstrar a validade da desigualdade triangular, como prometido anteriormente:

$$\begin{aligned}
(|\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|)^2 &= |\overrightarrow{v}|^2 + 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| + |\overrightarrow{w}|^2 \\
&\geq |\overrightarrow{v}|^2 + 2(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) + |\overrightarrow{w}|^2 \\
&= \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} + 2(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} \\
&= (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).
\end{aligned}$$

(Observe que, na última igualdade, usamos a propriedade (I) e duas vezes a propriedade (II).) Temos, então,

$$(|\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|)^2 \geq |\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}|^2.$$

Por fim, extraindo a raiz quadrada e lembrando que os módulos não podem ser negativos, obtemos

$$|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|,$$

que é exatamente a desigualdade triangular.

Outra aplicação fundamental da desigualdade de Cauchy é consequência da seguinte observação: se $\overrightarrow{v} \neq 0$ e $\overrightarrow{w} \neq 0$, podemos dividir as desigualdades

$$-|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}| \leq \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} \leq |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|$$

por $|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|$ para obter

$$-1 \leq \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|} \leq 1.$$

Quando $\theta$ varia de 0 a $\pi$, sabemos que $\cos\theta$ varia de 0 a 1, e que cada valor de 0 a 1 é realizado como cosseno de algum ângulo $\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$ (veja a figura 6).

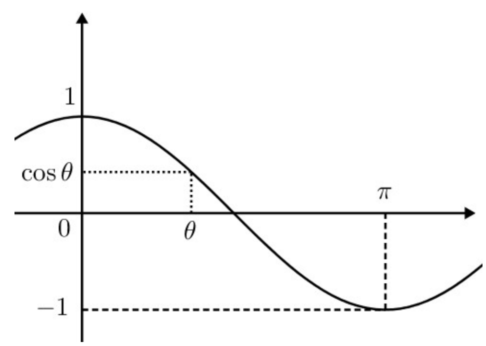


Figura 6: qualquer número entre 0 e 1 é igual ao cosseno de algum ângulo.

Assim, podemos escrever

$$\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|} = \cos\theta$$

ou, o que é o mesmo,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos\theta. \tag{6}$$

Vamos, agora, mostrar que o ângulo $\theta$ é exatamente o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Para tanto, aplicamos a lei dos cossenos ao triângulo da figura 7, para obter

$$|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2 + |\overrightarrow{w}|^2 - 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos\theta.$$

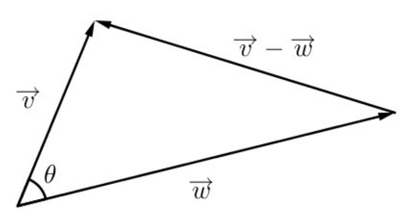


Figura 7: dois vetores e sua diferença formam um triângulo.

Da identidade (5) segue que $|\overrightarrow{v}| = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}$, $|\overrightarrow{w}| = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}$ e $|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}|^2 = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$. Substituindo esss igualdades na expressão da lei dos cossenos acima, obtemos

$$(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} - 2|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos\theta.$$

Usando as propriedades algébricas do produto escalar, podemos expandir os produtos do primeiro membro dessa expressão, obtendo

$$\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{w}-\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}-2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta.$$

Portanto, após os cancelamentos óbvios, ficamos com a igualdade

$$-2\vec{v}\cdot\vec{w}=-2|\vec{v}||\vec{w}|\cos\theta,$$

que é exatamente (6).

Um caso particular de especial importância é aquele em que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são **ortogonais**, ou seja, quando o ângulo entre eles é $\theta=\frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos\theta=0$, logo, temos o seguinte resultado:

> Dois vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$.

Se $\vec{v}=\overrightarrow{OA}$ e $\vec{w}$ são dois vetores não nulos, a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ é o comprimento do segmento $OA'$, onde $A'$ é o pé da perpendicular baixada de $A$ até a reta suporte do vetor $\vec{w}$ (figura 8).

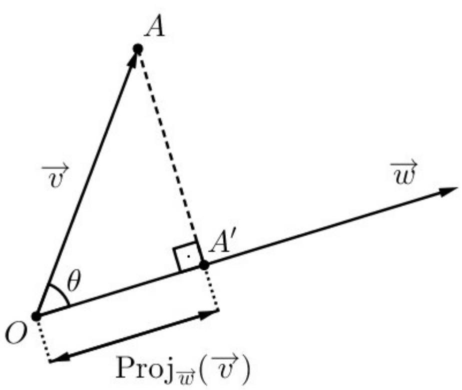


Figura 8: a projeção ortogonal de um vetor sobre outro.

Supondo que o ângulo $\theta$ entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja agudo, temos:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{w}}(\vec{v})=\overline{OA'}=\overline{OA}\cos\theta=|\vec{v}|\cos\theta.$$

Mas, como $\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$, segue que

$$\mathrm{Proj}_{\vec{w}}(\vec{v})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|}. \tag{7}$$

Um vetor $\vec{u}$ é dito **unitário** se $|\vec{u}|=1$. Se $\vec{v}$ é um vetor qualquer, a sua projeção sobre o vetor unitário $\vec{u}$ é

$$\mathrm{Proj}_{\vec{u}}(\vec{v})=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$

Como aplicação das ideias acima, se $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$, então podemos escrever

$$\begin{aligned}\vec{v}&=(v_1,0,0)+(0,v_2,0)+(0,0,v_3)\\&=v_1\vec{e}_1+v_2\vec{e}_2+v_3\vec{e}_3,\end{aligned}$$

onde $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$ e $\vec{e}_3=(0,0,1)$ são três vetores unitários. Assim, temos:

$$\mathrm{Proj}_{\vec{e}_1}(\vec{v})=\vec{v}\cdot\vec{e}_1=(v_1,v_2,v_3)\cdot(1,0,0)=v_1,$$

$$\mathrm{Proj}_{\vec{e}_2}(\vec{v})=\vec{v}\cdot\vec{e}_2=(v_1,v_2,v_3)\cdot(1,0,0)=v_2,$$

$$\mathrm{Proj}_{\vec{e}_3}(\vec{v})=\vec{v}\cdot\vec{e}_3=(v_1,v_2,v_3)\cdot(1,0,0)=v_3,$$

ou seja, as projeções de $\vec{v}$ sobre os vetores unitários $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são as três coordenadas desse vetor.

## Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Existem muitos exemplos de problemas onde se procura minimizar alguma distância e que podem ser resolvidos usando-se a desigualdade triangular. Vamos exibir alguns desses exemplos em uma aula complementar.

As propriedades (1), (2) e (3) de módulo podem ser usadas como condições que *definem* a noção de módulo. Da mesma forma, podemos definir produto interno como uma *função bilinear* $f$ que associa a cada par de vetores $(\vec{v},\vec{w})$ o número real $f(\vec{v},\vec{w})$ de tal modo que $f(\vec{v},\vec{v})\geq 0$, a igualdade valendo se, e somente se, $\vec{v}=0$. As noções de módulo e produto escalar (também chamado de produto interno), assim como a própria noção de vetor, pertencem a uma parte da Matemática chamada *Álgebra Linear*.

A referência [1.] também trata vetores no plano, apresentando algumas aplicações geométricas.

## Sugestões de Leitura Complementar


1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol. 2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.