Material Teórico - Módulo Operações Básicas

Operações com números naturais - Parte 1

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

2 de Novembro de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Desde pequenos, nos habituamos às operações da aritmética elementar (adição, subtração, multiplicação e divisão), que entram no nosso cotidiano quando realizamos pagamentos, controlamos o tempo, fazemos pesagens, etc. Nossa habilidade em efetuar essas operações vem, muitas vezes, das situações em que as empregamos no dia a dia, nas quais fazemos contas envolvendo apenas números pequenos. Com números maiores, contudo, qualquer um pode ter dificuldade com aritmética básica se não entender o mecanismo de funcionamento das operações. Assim, aqui revisamos a adição e a subtração, deixando a multiplicação e a divisão para o próximo material.

Nesta seção, assumimos que o leitor já aprendeu, em algum momento, a somar e subtrair números naturais, da forma convencional, mas iremos estudar o procedimento adotado e explicar porque ele funciona.

2 O algoritmo da adição

Um *algoritmo* é uma sequência de instruções, isto é, uma *receita*, para resolver um problema ou calcular uma expressão.

Vamos ver alguns exemplos de como realizar a operação de adição (soma), para depois entender como o *algoritmo da adição* funciona. Iniciamos com a soma $43 + 54$, para a qual temos que

$$\begin{aligned} 43 + 54 &= 4\times 10 + 3 + 5\times 10 + 4 \\ &= (4\times 10 + 5\times 10) + (3 + 4) \\ &= 9\times 10 + 7 \\ &= 97. \end{aligned}$$

Efetuamos a adição acima usando a representação decimal dos números que estão sendo somados: somamos as unidades do primeiro número com as unidades do segundo e as dezenas do primeiro número com as dezenas do segundo. Na primeira linha vemos que 43 é o mesmo que 4 dezenas e 3 unidades e 54 é o mesmo que 5 dezenas e 4 unidades. Em seguida, na segunda linha reordenamos as parcelas, agrupando todas as dezenas e todas as unidades. A terceira linha traz o resultado da adição efetuada na linha anterior (assim, 4 dezenas + 5 dezenas são 9 dezenas, enquanto 3 unidades + 4 unidades são 7 unidades). Enfim, a quarta e última linha traz a representação decimal do resultado da adição.

O **dispositivo prático** é a maneira de escrever os números que torna todo o processo acima mais prático. Basta posicionar um número acima do outro de tal modo que os algarismos das unidades, dezenas, centenas etc, dos números estejam respectivamente alinhados em uma mesma coluna. Assim, as somas "unidade com unidade", "dezena com dezena" etc, são feitas somando os números de cada coluna, como se vê a seguir:

$$\begin{array}{r} 43 \\ +54 \\ \hline 97 \end{array}$$

Acontece que, às vezes, ao somar dois algarismos de uma coluna, o resultado é maior ou igual a 10, não "cabendo" numa só coluna. Isso origina o que chamamos de "vai um". Vejamos.

Vamos realizar a soma $38 + 5$, decompondo o número 38 em 3 dezenas e 8 unidades:

$$\begin{aligned} 38 + 5 &= 3\times 10 + 8 + 5 \\ &= 3\times 10 + 13 \\ &= 3\times 10 + 10 + 3 \\ &= 3\times 10 + 1\times 10 + 3 \\ &= 4\times 10 + 3 \\ &= 43. \end{aligned}$$

Na segunda linha, somamos as 8 unidades com as 5 unidades, obtendo 13 unidades. Portanto, ficamos com 3 dezenas e 13 unidades, mas não podemos escrever a representação decimal do resultado utilizando essa informação pois não temos um único algarismo que represente o número 13, uma vez que os algarismos decimais só vão até 9. Então, para resolver isso, na terceira linha decompomos as 13 unidades em 1 dezena e três unidades. Como já havia três dezenas, ficamos agora com 4 dezenas e 3 unidades, como pode ser visto na quarta linha. Portanto, o resultado da adição é 4 dezenas e 3 unidades, ou seja, 43.

Usando o dispositivo da soma, escrevemos:

$$\begin{array}{r} \color{blue}{1} \\ 38 \\ +\ 5 \\ \hline 43 \end{array}$$

Nele, iniciamos somando 8 e 5 na coluna da direita, obtendo 13. Como 13 é $1 \times 10 + 3$, levamos o algarismo que indica a quantidade de dezenas no número 13, ou seja, o algarismo 1, para a coluna da esquerda, que é a coluna das dezenas. Então, adicionamos esse algarismo 1 ao 3, obtendo 4. Assim, perceba que, novamente, o dispositivo prático é simplesmente uma maneira resumida de escrever a conta longa que havíamos feito anteriormente usando as decomposições.

Finalizamos com mais um exemplo de adição, somando os números 307, 438 e 259. Temos o dispositivo prático

$$\begin{array}{r} \color{blue}{12} \\ 307 \\ 438 \\ +259 \\ \hline 1004 \end{array}$$

Para explicar porque vão 2 da coluna da direita para a coluna do meio e porque vai 1 da coluna do meio para a coluna da esquerda, efetuemos a adição usando as decomposições das parcelas 307, 438 e 259, como a seguir:

$$
\begin{aligned}
307 + 438 + 259 &= \\
&= 3\times100 + 7 + 4\times100 + 3\times10 + 8 + 2\times100 + 5\times10 + 9 \\
&= 3\times100 + 4\times100 + 2\times100 + 3\times10 + 5\times10 + 7 + 8 + 9 \\
&= 3\times100 + 4\times100 + 2\times100 + 3\times10 + 5\times10 + 24 \\
&= 3\times100 + 4\times100 + 2\times100 + 3\times10 + 5\times10 + 2\times10 + 4 \\
&= 3\times100 + 4\times100 + 2\times100 + 10\times10 + 4 \\
&= 3\times100 + 4\times100 + 2\times100 + 1\times100 + 4 \\
&= 10\times100 + 4 \\
&= 1000 + 4 \\
&= 1004.
\end{aligned}
$$

Decompomos cada número, depois reordenamos as parcelas, de modo a agrupar as unidades, dezenas e centenas. Depois começamos a realizar as somas, partindo das unidades: $7 + 8 + 9 = 24$. O número 24 tem 2 dezenas e 4 unidades. Assim, essas 2 dezenas serão somadas com as dezenas dos números originais (daí o vai 2). Agora, temos um total de $2 + 0 + 3 + 5$ dezenas, ou seja, 10 dezenas. Isso equivale a 1 centena, de forma que temos um "vai 1" para a coluna das centenas.

3 Exercícios resolvidos

Exemplo 1. *Um comerciante vendeu* 7348 *litros de leite numa semana. Na semana seguinte, ele vendeu mais* 5946 *litros. Ao todo, quantos litros de leite o comerciante vendeu?*

Solução. Devemos armar o dispositivo da soma e efetuar a adição $7348 + 5946$:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & 1 & \\
 & & 7 & 3 & 4 & 8 \\
+ & & 5 & 9 & 4 & 6 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & 9 & 4
\end{array}
$$

Começamos pela coluna das unidades, obtendo $8+6=14$. Como 14 é o mesmo que 1 dezena e 4 unidades, escrevemos o número 4 como parte do resultado para a soma, na coluna das unidades e a dezena é enviada para para a coluna das dezenas (vai 1). Assim $1+4+4=9$ é a soma da coluna das dezenas (o 1 que veio da soma das colunas das unidades está colorido de azul). Na coluna das centenas, temos $3+9=12$ centenas, o que é o mesmo que $10+2$ centenas. As 10 centenas equivalem a 1 milhar, assim, vai 1 para a coluna das unidades de milhar; as outras 2 centenas geram o 2 que é escrito no resultado. Por fim, a soma da coluna das unidades de milhar passa a ser: $1+7+5=13$. □

Exemplo 2. *Um fazendeiro mediu sua terra, de formato retangular, para cercá-la inteiramente com uma cerca de madeira. Quantos metros de cerca ele deverá fazer, se sua fazenda possui* 1500 *metros de largura por* 2789 *metros de comprimento?*

a) 3000 *metros.*

b) 4289 *metros.*

c) 8000 *metros.*

d) 8578 *metros.*

e) 9000 *metros.*

Solução. Antes de resolver o problema, devemos observar que um retângulo possui 4 lados. Suponhamos que os lados da frente e do fundo meçam 1500 metros, pois essa é a medida da largura do retângulo que forma o terreno. Então, esses dois lados medem, ao todo, $1500+1500=3000$ metros. Essa conta é simples, pois $1500=15\times100$, ou seja, temos 15 centenas. Assim, $1500+1500$ é o mesmo que $15+15$ centenas, ou seja, 30 centenas.

Os outros dois lados do retângulo do retângulo medem 2789 metros cada, que é o comprimento do terreno, correspondentes às laterais. A soma desses lados é 5578 como podemos ver no dispositivo:

$$\begin{array}{r} {\color{blue}1\,1\,1} \\ 2\,7\,8\,9 \\ +\,2\,7\,8\,9 \\ \hline 5\,5\,7\,8 \end{array}$$

Assim, a metragem total da cerca que o comerciante deverá comprar é de $3000 + 5578 = 8578$ metros.

$$\begin{array}{r} 3\,0\,0\,0 \\ +\,5\,5\,7\,8 \\ \hline 8\,5\,7\,8 \end{array}$$

A alternativa correta é a da letra c). $\square$

Exemplo 3. *Na adição abaixo, símbolos iguais representam um mesmo algarismo. Substitua esses símbolos por algarismos, de modo que a adição tenha sentido.*

$$\begin{array}{rr} & \triangle \\ & \triangle \\ + & \square \\ \hline \square & \triangle \end{array}$$

Solução. Observe que a adição acima parece uma equação. De fato, fazendo uso das propriedades do sistema de numeração decimal, a adição equivale a

$$\triangle + \triangle + \square = 10\times\square + \triangle,$$

ou seja, a $\triangle = 9\times\square$. Como $\triangle$ é um algarismo, vale no máximo 9. Se $\square$ fosse 0 teríamos que $\triangle$ também seria zero, o que não é possível, pois $\triangle \neq \square$. Devemos necessariamente ter $\square = 1$, pois, se $\square$ fosse maior que 1, então $\triangle$ teria dois algarismos. Assim, $\triangle = 9$. $\square$

Exemplo 4 (OBM). *A adição a seguir está incorreta.*

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

Entretanto, se substituirmos todas as ocorrências de um certo algarismo a por outro algarismo b, a conta ficará correta. Qual é o valor de $a + b$?

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

Solução. Começamos efetuando a adição com o auxílio do algoritmo da adição, para descobrir a partir de qual coluna a soma está incorreta. A primeira coluna da direita nos dá $6 + 0 = 6$ (correto). A coluna a seguir traz $8 + 3 = 11$, o que nos faz, no resultado, escrever 1 na coluna das dezenas e levar 1 para a coluna das centenas (correto). A seguir, somamos $1 + 5 + 4 = 10$, escrevemos 0 no total e levamos 1 para a próxima coluna da direita (correto). A soma da próxima coluna então é $1 + 2 + 9 = 12$, e vai 1 de novo (correto). Na adição feita na quinta coluna aparece o primeiro erro, pois $1 + 4 + 2 = 7$ mas, no resultado, há um algarismo 1 nessa coluna. Assim, na quinta coluna temos de trocar ou o algarismo 4, ou o algarismo 2 ou o algarismo 1.

Se trocarmos o 4, devemos trocá-lo por 8 (pois $1+8+2 = 11$), mas isso estraga a adição feita na terceira coluna. Se trocarmos o 2, devemos trocá-lo por 6 (pois $1+4+6 = 11$), e veja que isso não estraga nem a adição da quarta coluna (pois $1 + 6 + 9 = 16$) nem a da sexta coluna (pois $1 + 7 + 8 = 16$). Assim, essa é a substituição indicada, a qual nos dá

$$\begin{array}{r} 746586 \\ +869430 \\ \hline 1616016 \end{array}$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 6$, de forma que $a + b = 8$. A alternativa correta é a letra c). □

4 Os algoritmos para subtração

Numa subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

A seguir, usamos alguns exemplos para recordar os dois algoritmos mais comuns para subtrações.

Começando com $437 - 25$, temos que

$$\begin{aligned}
437 - 25 &= 4\times 100 + 3\times 10 + 7 - (2\times 10 + 5)\\
&= 4\times 100 + 3\times 10 + 7 - 2\times 10 - 5\\
&= 4\times 100 + 3\times 10 - 2\times 10 + 7 - 5\\
&= 4\times 100 + 1\times 10 + 2\\
&= 412.
\end{aligned}$$

Essas manipulações são efetuadas automaticamente quando se emprega o dispositivo prático de subtração:

$$\begin{array}{rccc}
 & 4 & 3 & 7\\
- & & 2 & 5\\
\hline
 & 4 & 1 & 2
\end{array}$$

No dispositivo acima, pomos o minuendo acima do subtraendo e fazemos a subtração por colunas, da direita para a esquerda. Esse exemplo é o mais simples que pode acontecer: quando em todas as colunas o número de cima é maior do que o número de baixo. Assim, como $7 - 5 = 2$, escrevemos 2 na primeira coluna, sob a barra do dispositivo. Em seguida, efetuamos $3 - 2 = 1$ e pomos 1 abaixo da barra, na segunda coluna. Ao examinar a terceira coluna, encontramos um 4 na sua entrada superior e um espaço em branco logo abaixo do algarismo 4; encaramos esse espaço em branco como um 0 e calculamos $4 - 0 = 4$, pondo 4 abaixo da barra.

A seguir, mostramos um exemplo em que precisamos subtrair do dígito das unidades um número maior do que ele.

Usamos a técnica do "pedir emprestado" para a coluna à esquerda. Formalmente, isto chama-se subtração com *decomposição e reagrupamento*, que é o algoritmo de subtração usualmente ensinado nas escolas.

Vamos efetuar $625 - 419$ com o dispositivo da subtração, empregando decomposição e reagrupamento:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 15 \\ & 6 & \cancel{2} & \cancel{5} \\ - & 4 & 1 & 9 \\ \hline & 2 & 0 & 6 \end{array}$$

De início, já temos um problema: o algarismo de cima na primeira coluna, 5, é menor que o de baixo, 9. Então, tomamos emprestadas 10 unidades da coluna das dezenas do minuendo, que somadas à sua coluna das unidades nos dá 15; em seguida, efetuamos a diferença $15-9$, obtendo 6, que é posto na coluna das unidades sob a barra. Dizer que tomamos 10 unidades emprestadas é modo de falar, até porque não devolvemos o que pegamos emprestado. Assim, o algarismo na coluna das dezenas do minuendo diminui de 1, que equivale às 10 unidades emprestadas à primeira coluna; por isso cortamos o 2 e colocamos 1 em seu lugar. Continuando, subtraímos 1 de 1, obtendo 0, que é escrito no lugar correspondente, sob a barra. Por fim, na última coluna, subtraímos 4 de 6, obtendo 2, que é posto sob a barra.

A seguir, justificamos por que o método de "pedir emprestado" funciona, com base nas representações decimais dos números envolvidos. O que fizemos acima foi o seguinte:

$$\begin{aligned} 625 - 419 &= 6\times100 + 2\times10 + 5 - 4\times100 - 1\times10 - 9 \\ &= 6\times100 + 1\times10 + 1\times10 + 5 - 4\times100 - 1\times10 - 9 \\ &= 6\times100 + 1\times10 + 15 - 4\times100 - 1\times10 - 9 \\ &= 6\times100 - 4\times100 + 1\times10 - 1\times10 + 15 - 9 \\ &= 2\times100 + 0\times10 + 6 \\ &= 206. \end{aligned}$$

Na segunda linha, vemos a retirada de uma dezena do minuendo, que, na terceira linha, é agrupada às suas unidades. Então, fazemos as subtrações indicadas, que correspondem às efetuadas no dispositivo, chegando à diferença entre os números 625 e 419.

Outra maneira de fazer a subtração acima é *por composição*, como descrevemos agora.

$$\begin{array}{r}
6\ 2\ {}^{1}5 \\
-\ 4\ {}^{1}1\ 9 \\
\hline
2\ 0\ 6
\end{array}$$

No dispositivo acima, o algarismo 1 ao lado esquerdo do 5 na primeira coluna se junta ao 5 do minuendo, formando o numeral 15. Então, efetuamos a subtração $15 - 9$, obtendo 6, que é posto na primeira coluna sob a barra. Em seguida, compensamos a soma de 10 ao minuendo, efetuada na subtração da primeira coluna, somando 1 ao subtraendo na segunda coluna; essa operação é indicada pelo 1 do lado esquerdo do algarismo 1 na segunda coluna. A seguir, fazemos as subtrações $2 - 2 = 0$ e $6 - 4 = 2$, colocando esses resultados sob a barra, nas respectivas colunas.

Novamente, em termos de representações decimais, o que fizemos acima foi o seguinte:

$$\begin{aligned}
625 - 419 &= 6\times 100 + 2\times 10 + 5 - (4\times 100 + 1\times 10 + 9) = \\
&= 6\times 100 + 2\times 10 + 5 + (10 - 10) - (4\times 100 + 1\times 10 + 9) \\
&= 6\times 100 + 2\times 10 + 5 + 10 - (4\times 100 + 1\times 10 + 1\times 10 + 9) \\
&= 6\times 100 + 2\times 10 + 15 - (4\times 100 + 2\times 10 + 9) \\
&= (6\times 100 - 4\times 100) + (2\times 10 - 2\times 10) + (15 - 9) \\
&= 2\times 100 + 0\times 10 + 6 \\
&= 206.
\end{aligned}$$

Assim, na segunda linha somamos e subtraímos 10 unidades, o que não modifica o resultado total da operação. Por sua vez, as 10 unidades somadas à segunda linha são adicionadas ao 5 em azul do minuendo, totalizando 15 unidades, que aparecem em laranja na quarta linha. As 10 unidades que são subtraídas na segunda linha são adicionadas ao subtraendo, aumentando em uma unidade seu algarismo das dezenas. Observe, nessas manipulações, as operações efetuadas automaticamente no dispositivo de subtração por compensação.

Dicas para o Professor

Este material pode ser tratado em dois encontros de 50 minutos.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental os estudantes têm os primeiros contatos com os algoritmos das operações básicas entre números naturais. Nesse primeiro momento, o foco está na parte puramente procedimental dos algoritmos.

Já nos anos finais do Ensino Fundamental, os algoritmos são mais uma vez abordados. Porém, o foco nesse momento deve ser outro. Os professores devem evidenciar que os algoritmos nada mais são do que um conjunto de passos bem sequenciados que permitem chegar aos resultados das operações. É interessante que o professor explique **por que** o algoritmo usual para realizar as opções de soma e subtração funcionam e mostrar que, em alguns casos, é possível realizar as operações de maneiras alternativas.

Além disso, os alunos devem aprender como a eficácia dos algoritmos está associada com as propriedades do sistema indo-arábico.

Também é importante introduzir situações-problemas cujas soluções envolvem o uso dos algoritmos. Assim, enfatizamos a visão de que a Matemática pode ser entendida como uma ferramenta para resolver problemas.