Material Teórico - O Plano Cartesiano e Sistemas de Equações

Sistemas de Equações do Primeiro Grau com Duas Incógnitas

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Prof. Francisco Bruno Holanda
Prof. Antonio Caminha Muniz Neto

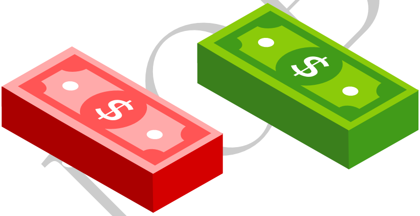
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Esta aula será dividida conceitualmente em duas partes. Na primeira, resolveremos sistemas de equações lineares que envolvem duas incógnitas utilizando métodos algébricos. Apresentaremos dois métodos básicos para a solução desses sistemas: o *método da substituição* e o *método da combinação linear* ou *eliminação*. Na segunda parte, veremos como podemos interpretar tais sistemas no plano cartesiano.

2 Sistemas de equações

Exercício 1. *Pedro tem apenas notas de cinco e de dois reais, num total de* 24 *notas. Se ele possui* 81 *reais ao todo, quantas são suas notas de cada tipo?*



Solução. Suponha que Pedro possui x notas de cinco reais e y notas de dois reais. Pela primeira informação, sabemos que $x+y=24$; pela segunda, $5x+2y=81$. Dessa forma, podemos considerar o seguinte sistema de equações nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} x+y=24 \\ 5x+2y=81 \end{cases}$$

Para resolvê-lo, podemos utilizar o método da substituição, que consiste em achar o valor da variável y em termos da variável x utilizando a primeira equação para, em seguida, aplicar esse valor na segunda equação. No caso no exercício que estamos resolvendo, tomando a primeira equação, podemos isolar a variável y "passando" x para o lado direito da mesma, de forma a obter

$$y = 24 - x.$$

Substituindo esse valor na segunda equação, temos:

$$5x + 2(24 - x) = 81.$$

Veja que, dessa forma, estamos reduzindo um sistema de duas equações em duas variáveis a uma única equação em uma única variável; portanto, estamos simplificando o problema, transformando-o em algo que já sabemos resolver. Continuando com a resolução, temos:

$$5x + 48 - 2x = 81 \Rightarrow 3x = 81 - 48 = 33 \Rightarrow x = 11.$$

Sabendo o valor de x, podemos encontrar facilmente o valor de y:

$$y = 24 - x = 24 - 11 = 13.$$

□

Observe, ainda, que a mesma técnica também poderia ter sido empregada caso tivéssemos isolado a variável x, em vez da variável y. Deixaremos a cargo do leitor a verificação de tal afirmação.

No próximo exercício, iremos apresentar um método alternativo para resolver sistemas, o método da combinação linear.

Exercício 2. *Resolva o sistema de equações a seguir:*

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}.$$

Solução. O primeiro passo é observar quais são os coeficientes da variável y nas equações do sistema: na primeira tal coeficiente é igual a 3, ao passo que na segunda ele é igual a 4. Em seguida, multiplicamos a primeira equação pelo coeficiente de y na segunda equação, e a segunda equação pelo coeficiente de y da primeira equação; assim fazendo, obtemos:

$$\begin{cases} x + 3y = 4(\times 4) \\ 2x + 4y = 6(\times 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 12y = 16 \\ 6x + 12y = 18 \end{cases}.$$

Agora, subtraímos uma equação da outra no último sistema acima, de forma que a variável y seja "eliminada". Subtraindo a primeira equação da segunda, temos:

$$6x - 4x + 12y - 12y = 18 - 16 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$$

Por fim, para achar o valor de y, basta aplicar o valor obtido de x na primeira equação do primeiro sistema, por exemplo: $1 + 3y = 4 \Rightarrow y = 1$. □

Agora, resolveremos um exemplo em que o sistema de equações precisa ser construído a partir de informações um tanto mais elaboradas apresentadas no enunciado.

Exercício 3 (OBM). *Samuel possui três irmãos a mais do que irmãs. Samila, a irmã de Samuel, possui o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Quantos filhos (homens e mulheres) possui o pai de Samuel e Samila?*

Solução. Sejam x o número de filhos (homens) e y o número de filhas (mulheres) do pai de Samuel. Como Samuel tem $x - 1$ irmãos, e tal total excede o número y de irmãs em 3, temos

$$x - 1 = y + 3.$$

Por outro lado, como Samila tem x irmãos e $y - 1$ irmãs, e como o total de seus irmãos é o dobro do total de suas irmãs, também temos

$$x = 2(y - 1).$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x - 1 = y + 3 \\ x = 2(y - 1) \end{cases}.$$

Antes de aplicar o método da combinação linear, devemos "arrumar" as equações do sistema de modo que as variáveis se encontrem apenas no lado esquerdo; para o caso do exercício que estamos resolvendo, ficamos com:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}.$$

Observando novamente os coeficientes de y em ambas as equações, multiplicamos a primeira delas por 2, obtendo

$$\begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ x - 2y = -2 \end{cases}.$$

No último sistema acima, subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos:

$$2x - x + (-2y + 2y) = 8 + 2 \Rightarrow x = 10.$$

Aplicando esse valor na primeira equação do sistema original (por exemplo), segue que

$$10 - 1 = y + 3 \Rightarrow y = 6.$$

□

No próximo exercício, faremos uso de uma tabela para organizar as informações que são dadas no enunciado.

Exercício 4. *Paulo possui* 13 *caixas vermelhas e cada uma delas está vazia ou contém* 7 *caixas azuis. Cada caixa azul está vazia ou contém* 7 *caixas verdes. Se ele possui* 145 *caixas vazias, quantas caixas ele possui ao todo?*

Solução. Vamos montar uma tabela que ajudará na solução do problema

Caixas	Vermelhas	Azuis	Verdes
Cheias	x	y	0
Vazias	$13-x$	$7x-y$	$7y$
Total	13	$7x$	$7y$

Suponha que o número de caixas vermelhas cheias seja igual a x e que o número de caixas azuis cheias seja y. Portanto, temos $7x$ caixas azuis e $7y$ caixas verdes. Note também que todas as caixas verdes estão vazias. Dessa forma, o total de caixas vazias é

$$(13-x)+(7x-y)+7y=145,$$

o que nos fornece a equação $x+y=22$. Portanto, o número total de caixas é

$$13+7(x+y)=13+7\times 22=167.$$

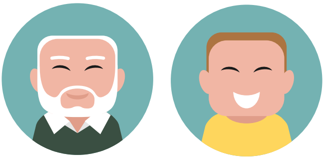
$\square$

Observe que, no problema anterior, não foi necessário descobrir os valores das variáveis x e y. De fato, qualquer par (x, y) de inteiros positivos tais que $x+y=22$ seria uma solução para a questão. Por outro lado, o enunciado não pede para encontrarmos tais valores. Veja que o único valor que deve ser encontrado é o número total de caixas que Paulo possui. "Por sorte", este valor pode ser calculado utilizando apenas a relação dada pela equação $x+y=22$.

Exercício 5 (OBM). *No fim de* 1994*, Neto tinha metade da idade de seu avô. Sabendo que a soma dos anos de nascimento dos dois é* 3844*, pergunta-se: quantos anos Neto completou em* 2006*?*

Solução. Suponha que Neto nasceu no ano x e que seu avô nasceu no ano y. Então, a primeira equação que pode ser formulada do enunciado é

$$x+y=3844.$$



Por outro lado, em 1994 Neto tinha $1994 - x$ anos, ao passo que seu avô tinha $1994 - y$ anos. Portanto, temos que

$$2(1994 - x) = 1994 - y$$

ou, o que é o mesmo,

$$2x - y = 1994.$$

Obtivemos, assim, o sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 3844 \\ 2x - y = 1994 \end{cases}.$$

Somando as duas equações do mesmo, temos

$$3x = 3844 + 1994 = 5838 \Rightarrow x = 1946.$$

Logo, Neto completou 60 anos no ano 2006. $\square$

3 Sistemas de equações e o plano cartesiano

Na aula anterior, aprendemos que uma equação linear em duas variáveis pode ser representada por uma reta no plano cartesiano. Nessa seção, utilizaremos esse fato para analisar as soluções de um sistema de equações lineares do ponto de vista *geométrico*. Vamos começar considerando o sistema que foi proposto no Exercício 2 deste material:

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Para descobrirmos por quais pontos passa a reta que representa a equação $x + 3y = 4$, basta substituir a variável x por valores arbitrários e calcular os valores correspondentes de y. Como exemplo, considere a seguinte tabela:

x	y
0	4/3
1	1
4	0

Dessa forma, a primeira reta passa pelos pontos $(0, \frac{4}{3})$, $(1, 1)$ e $(4, 0)$. Fazendo o mesmo para a equação $2x + 4y = 6$, obtemos a tabela abaixo:

x	y
0	3/2
1	1
3	0

Portanto, a segunda reta passa pelos pontos $(0, \frac{3}{2})$, $(1, 1)$ e $(3, 0)$.

Observando a figura 1, verificamos que as duas retas se encontram apenas no ponto $(1, 1)$, que é a solução do sistema.

Após o exemplo acima, podemos fazer a seguinte análise: em um sistema de equações com duas equações lineares e duas variáveis, cada uma das equações representa uma reta no plano cartesiano, de forma que só há três situações possíveis:

(i) As retas são concorrentes e se encontram em um único ponto. Neste caso, o sistema terá uma única solução.

(ii) As retas são paralelas e distintas. Neste caso, o sistema não terá solução.

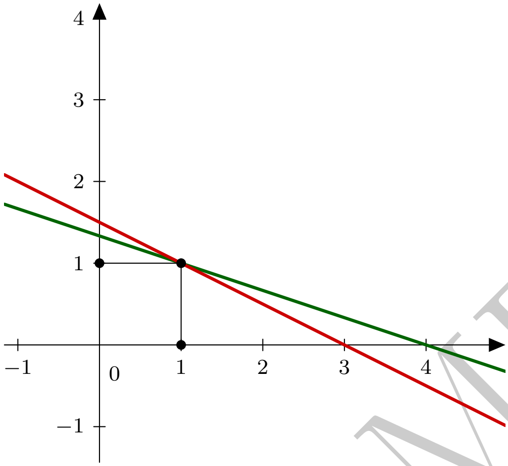


Figura 1: representação geométrica de um sistema de equações no plano cartesiano.

(iii) As retas estão sobrepostas (isto é, são a mesma reta). Neste caso, o sistema tem infinitas soluções.

Os exercícios 1, 2, 3 e 5 da primeira seção servem como exemplo para a primeira situação, em que há uma única solução para o sistema. Para a segunda situação, considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x + 3y = 3 \end{cases} .$$

Repetindo o processo executado no exemplo anterior para encontrar pontos pelos quais as retas passam, obtemos para a primeira equação:

x	y
0	5/3
1	4/3
5	0

Para a segunda equação, temos:

x	y
0	1
1	2/3
3	0

Na figura 2 podemos observar que as retas correspondentes às equações do sistema são paralelas e distintas, de forma que não têm pontos em comum.

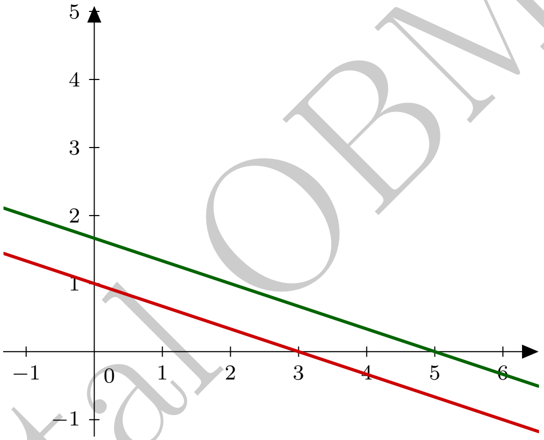


Figura 2: um sistema linear cuja representação geométrica gera retas paralelas.

Por outro lado, do ponto de vista algébrico era realmente de se esperar que o sistema não tivesse solução. De fato, uma solução do sistema seria um par ordenado (x, y) de números reais tais que $x + 3y = 5$ e $x + 3y = 3$. Se fosse possível encontrar tais valores, deveríamos ter $5 = 3$, o que é uma contradição.

Para finalizar, vejamos a terceira situação que foi apresentada: o caso de um sistema linear com infinitas soluções.

Como exemplo, considere:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases} .$$

Nesse caso, utilizando o método de substituição de valores, verificamos que as duas equações geram os mesmos conjuntos de pontos. Por exemplo,

x	y
0	7/2
1	3
7	0

Dessa forma, as retas que representam as duas equações do sistema estão sobrepostas, e qualquer par (x, y) que resolva a primeira equação também resolverá a segunda, e vice-versa. Isso ocorre porque a segunda equação é, na verdade, a primeira multiplicada por um número não nulo (que nesse caso específico é 2). De outra forma, podemos considerar a primeira equação como uma mera simplificação da segunda.

4 Sugestões ao professor

Separe dois encontros de 50 minutos cada para apresentar o conteúdo deste material. Use o primeiro encontro para mostrar os dois métodos apresentados para resolver sistemas lineares, e o segundo encontro para ensinar o método de representação geométrica. Esteja ciente de que, muito provavelmente, a maior parte dos alunos necessite de mais exemplos que os aqui colecionados.

No momento em que você esteja apresentando a representação de sistemas lineares no plano cartesiano, é possível que alguns de seus alunos o questionem sobre o caso em que as equações são caracterizadas por duas retas paralelas. Neste caso, faça-os primeiro imaginar que tipo de sistema daria origem a tal situação, para depois apresentar um exemplo em que isso ocorra.

Além de ensinar como desenhar as retas em plano cartesiano feito no papel, recomendamos que você utilize algum *software* livre para desenhar gráficos, como por exemplo o GeoGebra.