Material Teórico - Módulo FRAÇÕES, O PRIMEIRO CONTATO

Frações e Suas Operações - Parte 6

Sexto Ano do Ensino Fundamental

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

23 de junho de 2025

Portal OBMEP

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Nesta sexta e última parte, ilustramos as operações aritméticas com frações introduzidas na primeira parte discutindo alguns problemas que envolvem tais operações. Os exemplos iniciais têm soluções simples e podem ser resolvidos diretamente, por meio de uma ou duas operações. Os problemas finais envolvem, além de operações com frações, ideias mais rebuscadas.

Exemplo 1. *Alfredo foi de carro da sua casa até um posto de gasolina. No início do trajeto, o marcador do nível de combustível apontava que o volume de gasolina correspondia a $\frac{3}{5}$ da capacidade do tanque. Chegando ao posto, Alfredo colocou combustível correspondente a $\frac{19}{35}$ do tanque para enchê-lo completamente. Que fração corresponde à quantidade de combustível consumida no trajeto da casa de Alfredo até o posto?*

Solução. Veja que, se Alfredo tivesse abastecido antes de ir ao posto, quando o marcador apontava que o volume de combustível correspondia a $\frac{3}{5}$ do tanque, ele teria colocado gasolina correspondente a $\frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ do tanque para enchê-lo. Portanto, a fração do tanque consumida no trajeto é dada pela diferença

$$\frac{19}{35} - \frac{2}{5}.$$

Para calcular essa diferença, note que o denominador 35 é múltiplo de 5, com $35 = 5 \cdot 7$, logo, a fração $\frac{2}{5}$ é equivalente a $\frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{14}{35}$, que tem o mesmo denominador de $\frac{19}{35}$. Desse modo, concluímos que

$$\frac{19}{35} - \frac{2}{5} = \frac{19}{35} - \frac{14}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

é a fração corresponde à quantidade de combustível consumida no trajeto da casa de Alfredo até o posto. □

Exemplo 2. *Se uma pessoa trabalhar durante o ano inteiro, de janeiro a dezembro, ela terá direito a um salário extra, que é chamado* 13° *salário. Mesmo que a pessoa não trabalhe o ano inteiro, ela deve receber o* 13° *salário proporcional aos meses*

Portal OBMEP

trabalhados durante aquele ano. Joaquim trabalhou de janeiro a agosto de 2024 *como vendedor em uma loja de peças para automóveis e recebeu* 1640 *reais de* 13° *salário proporcional aos meses trabalhados. Qual foi o salário recebido por Joaquim em cada um dos meses de janeiro a agosto, supondo que ele não teve qualquer reajuste salarial nesse período?*

Solução. Joaquim trabalhou de janeiro a agosto, ou seja, por oito meses, durante o ano de 2024. Assim, ele deve receber $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ do valor do 13° salário que receberia se tivesse trabalhado durante o ano inteiro.

Desse modo, $\frac{2}{3}$ do valor do 13° salário correspondem a 1640 reais. Daí, segue que $\frac{1}{3}$ do 13° corresponde a $1640 \div 2 = 820$ reais e, portanto, $\frac{3}{3}$ do 13° salário (ou seja, o salário inteiro) correspondem a $820 \cdot 3 = 2460$ reais.

Assim, o salário de Joaquim de janeiro a agosto foi de 2460 reais. □

Exemplo 3. *Resolva os problemas a seguir.*

(*a*) *Gabriel tinha* 48 *bolas de gude, mas doou* $\frac{3}{8}$ *do que possuía para Levi. Com quantas bolas de gude Gabriel ficou?*

(*b*) *Depois de doar as bolas de gude a Levi, Gabriel voltou pra casa. Quando conferiu o total de bolas de gude em seu bolso, percebeu que havia perdido algumas pelo caminho, pois havia somente* $\frac{4}{5}$ *do que deveria haver depois da doação que fez a Levi. Quantas bolas de gude Gabriel perdeu no caminho de volta para casa?*

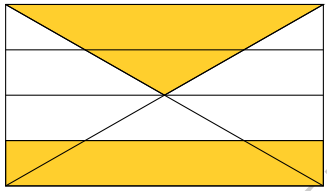
Solução. Como Gabriel doou $\frac{3}{8}$ de suas bolas de gude para Levi, ele ficou com $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ das bolas de gude que possuía. Para calcular quantas bolas de gude correspondem a $\frac{5}{8}$, note que as 48 bolas de gude correspondem a $\frac{8}{8}$, logo, $\frac{1}{8}$ corresponde a $48 \div 8 = 6$ bolas de gude. Portanto, $\frac{5}{8}$ correspondem a $5 \cdot 6 = 30$ bolas de gude, ou seja, Gabriel ficou com 30 bolas de gude depois da doação que fez a Levi. Isso responde o item (a).

Para o item (b), veja que, após a doação, as 30 bolas de gude que restaram com Gabriel correspondem a $\frac{5}{5}$. Então,

Portal OBMEP

ele perdeu $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ pelo caminho, o que corresponde a $30 \div 5 = 6$ bolas de gude. □

Exemplo 4 (OBMEP). *Os segmentos horizontais dividem o retângulo da figura em quatro faixas de mesma largura. A área da região amarela corresponde a qual fração da área do retângulo?*



(a) $\frac{1}{3}$.

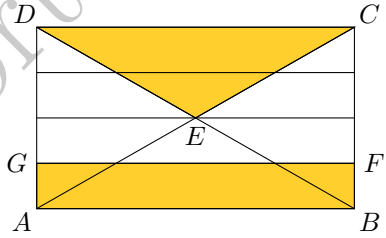
(b) $\frac{5}{12}$.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) $\frac{7}{12}$.

(e) $\frac{2}{3}$.

Solução. Vamos destacar alguns pontos com o objetivo de fazer referência a alguns polígonos presentes na figura.



É claro que a área do retângulo $ABFG$ é igual a $\frac{1}{4}$ da área de $ABCD$, pois, pelo enunciado, a medida de AG é igual a $\frac{1}{4}$ de AD.

Por outro lado, a área do triângulo ACD é igual à metade da área do retângulo $ABCD$.

Portal OBMEP

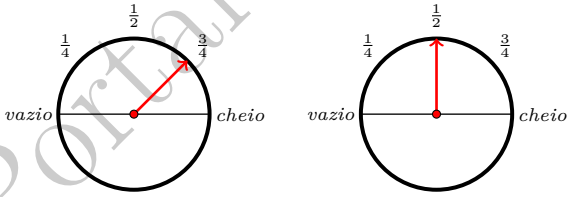
Além disso, os triângulos AED e CED têm áreas iguais, pois, uma vez que as diagonais de um retângulo se encontram em seus pontos médios, temos $AE = CE$ e o vértice D é comum aos dois triângulos, o que significa que suas alturas a partir de D são iguais. Desse modo, a área de CED é igual à metade da área de ACD, ou seja, é igual a $\frac{1}{4}$ da área do retângulo $ABCD$.

Concluímos, assim, que a área da região amarela, que é dada pela soma das áreas do retângulo $ABFG$ e do triângulo CED é igual a

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

da área do retângulo $ABCD$. □

Exemplo 5 (CMF). *Nos painéis dos automóveis há um marcador que indica a quantidade de combustível no tanque. Através de um ponteiro, o marcador indica a fração de combustível existente no tanque em relação à capacidade máxima. Quando o ponteiro aponta para a posição "cheio", significa que o tanque está completo de combustível. As figuras abaixo representam o marcador de combustível de um automóvel no momento da partida e no momento da chegada de uma viagem.*



Que fração do tanque de combustível foi utilizada na viagem?

Solução. Veja que, no momento da partida, o tanque estava com $\frac{3}{4}$ de sua capacidade e, na chegada, estava com $\frac{1}{2}$ de sua capacidade. Assim, a fração que representa o total de gasolina consumido na viagem é dada pela diferença $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$.

Como as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ têm denominadores distintos, devemos encontrar duas frações equivalentes a elas e que possuam denominadores iguais. Como 4 é múltiplo de 2 (pois $4 = 2 \cdot 2$),

Portal OBMEP

podemos encontrar uma fração com denominador 4 equivalente a $\frac{1}{2}$ multiplicando numerador e denominador dessa fração por 2. Assim, obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}.$$

Portanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4},$$

ou seja, $\frac{1}{4}$ é a fração do tanque de combustível utilizada na viagem. □

Exemplo 6. *Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram $\frac{1}{4}$ do percurso na primeira hora, $\frac{2}{5}$ do percurso na segunda hora e* 14 *quilômetros na terceira e última hora de passeio. Quantos quilômetros tem o percurso total do passeio?*

(*a*) 14.

(*b*) 16.

(*c*) 40.

(*d*) 36.

Solução. A ideia para resolver o problema é calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora de passeio. Para isso, devemos somar as frações correspondentes ao total percorrido na primeira e segunda horas e, em seguida, subtrair o resultado de 1 inteiro, que corresponde ao percurso total do passeio.

Para somar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, uma vez que elas não têm um mesmo denominador, devemos encontrar duas frações, uma equivalente a $\frac{1}{4}$ e outra equivalente a $\frac{2}{5}$, que tenham denominadores iguais. Assim, obtemos

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}.$$

Portal OBMEP

Agora, note que $\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$ é a fração do percurso que falta para completá-lo. Por sua vez, essa fração corresponde aos 14 quilômetros percorridos durante a terceira hora. Então,

$$\frac{7}{20} \longrightarrow 14 \text{ km};$$

$$\frac{1}{20} \longrightarrow 14 \div 7 = 2 \text{ km};$$

$$\frac{20}{20} \longrightarrow 20 \cdot 2 = 40 \text{ km}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (c). □

Exemplo 7 (CMRJ). *Em um passeio em família, Jorge levou embalagens com bebidas em uma caixa de isopor, de formato cúbico, cujas arestas internas mediam* 28 *cm. Para manter as bebidas geladas, Jorge colocou cubinhos de gelo dentro do isopor, completando toda a sua capacidade, sendo o volume de gelo colocado igual a* $\frac{2}{5}$ *do volume total das bebidas (desconsidere o volume das embalagens). Ao final do passeio, toda a bebida havia sido consumida e suas embalagens haviam sido jogadas na lixeira. Nenhum cubinho de gelo foi retirado do isopor durante o passeio. Sendo assim, a água formada pelo derretimento de todos os cubinhos de gelo atingiu uma altura de* 3*cm. Sabendo que cada embalagem possuía* 420 *mL (mililitros) de bebida, a quantidade de embalagens colocadas no isopor, para esse passeio em família, é um número múltiplo de:*

(*a*) 3.

(*b*) 5.

(*c*) 7.

(*d*) 9.

(*e*) 11.

Portal OBMEP

Solução. O volume da caixa de isopor é dado por 28^3 cm^3, o que é o mesmo que 28^3 mL, uma vez que 1 cm^3 corresponde a 1 mL.

Por outro lado, como a altura da água na caixa após o derretimento do gelo era 3 cm, esse volume corresponde a $\frac{3}{28}$ do volume da caixa, ou seja, corresponde a $\frac{3}{28}$ de 28^3 mL, que é igual a

$$\frac{3}{28} \cdot 28^3 = 3 \cdot 28^2 \text{ mL}.$$

É dito que o volume do gelo, que, após o derretimento, é igual ao volume de água na caixa, corresponde a $\frac{2}{5}$ do volume das bebidas. Desse modo, temos

$$\frac{2}{5} \longrightarrow 3 \cdot 28^2 \text{ mL};$$

$$\frac{1}{5} \longrightarrow \frac{3 \cdot 28^2}{2} = 3 \cdot 14 \cdot 28 \text{ mL};$$

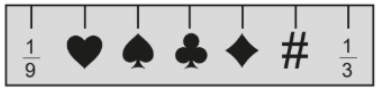
$$\frac{5}{5} \longrightarrow 5 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 28 \text{ mL}.$$

Por fim, como o volume de cada embalagem é 420 mL e $420 = 3 \cdot 10 \cdot 14$, chegamos ao total de

$$\frac{5 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{14} \cdot 28}{\cancel{3} \cdot 10 \cdot \cancel{14}} = \frac{\cancel{5} \cdot 28}{\cancel{10}_2} = 14 \text{ embalagens.}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra (c). □

Exemplo 8 (OBMEP). *A figura representa uma régua especial, na qual as distâncias entre tracinhos consecutivos são iguais. Qual é o símbolo que indica $\frac{2}{9}$?*



Solução. Veja que a diferença entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ é

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}.$$

Portal OBMEP

Portanto, $\frac{2}{9}$ é a medida do segmento da régua que vai de $\frac{1}{9}$ a $\frac{1}{3}$.

Por outro lado, esse segmento está dividido em 6 segmentos iguais, logo, a medida de cada um deles é igual a

$$\frac{2}{9} \div 6 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}.$$

Finalmente, veja que o segmento da régua que vai da marcação $\frac{1}{9}$ à marcação de $\frac{2}{9}$ tem comprimento

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9};$$

também, como

$$\frac{1}{9} \div \frac{1}{27} = \frac{1}{9} \cdot 27 = 3,$$

concluímos que cabem três segmentos de comprimento $\frac{1}{27}$ no segmento que vai de $\frac{1}{9}$ a $\frac{2}{9}$.

Assim, o símbolo que indica $\frac{2}{9}$ é ♣. □

Exemplo 9 (CMRJ - Adaptado)**.** *Cecília aproveitou um período da manhã de sábado para estudar Língua Portuguesa, Redação e Matemática, realizando um intervalo para beber água e fazer um lanche rápido. Ela utilizou $\frac{1}{6}$ do período para resolver exercícios de Língua Portuguesa e, depois, $\frac{3}{10}$ do restante do período para fazer uma redação. Em seguida, veio o intervalo, que durou 28 minutos. Por fim, Cecília gastou $\frac{1}{2}$ do tempo total para a resolução de questões de Matemática. Quantos minutos ela gastou para fazer a redação?*

(*a*) 56.

(*b*) 84.

(*c*) 100.

(*d*) 140.

(*e*) 168.

Portal OBMEP

Solução. Depois que Cecília utilizou $\frac{1}{6}$ do tempo reservado para resolver exercícios de Língua Portuguesa, restaram $\frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ do tempo total. Assim, a fração do tempo reservada à redação foi

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

Depois do intervalo de 28 minutos, Cecília gastou $\frac{1}{2}$ do tempo total com as questões de Matemática. Portanto, a fração do tempo total gasto com as atividades de Língua Portuguesa, Redação e Matemática foi

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{11}{12}.$$

A fração que resta do tempo total, $\frac{12}{12} - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$, corresponde ao intervalo de 28 minutos. O tempo utilizado para a redação corresponde a $\frac{1}{4}$ do total o que é o mesmo que $\frac{3}{12}$; assim,

$$\frac{1}{12} \longrightarrow 28\,\text{min};$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} \longrightarrow 3 \cdot 28 = 84\,\text{min}.$$

Concluímos que Cecília gastou 84 minutos para compor a redação, de modo que a alternativa correta é (b). □

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores deixem os alunos refletirem sobre os exemplos apresentados por alguns minutos, antes de explicarem as soluções. Ressaltamos a importância de que os alunos tentem encontrar as soluções por meios próprios. Por outro lado, ainda que eles não as encontrem, ou apresentem uma solução errada, esse processo é fundamental para a aprendizagem.

Portal OBMEP

É recomendável que o professor faça uma revisão sobre equivalência de frações antes de apresentar os exemplos deste material. No exemplo **??**, é importante que os alunos entendam que a ideia de divisão em partes iguais para números inteiros se aplica às frações.

Portal OBMEP