

Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Leis do Limite - Parte 2

Funções Racionais

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

10 de Setembro de 2022



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Nesta aula de exercícios, apresentaremos alguns resultados e problemas relativos ao cálculo do limite de um quociente, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, sendo “ \sim ” qualquer uma das simbologias a seguir, $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^-$ ou $x \rightarrow a^+$.

No caso em que f/g é uma função racional, isto é, f e g são polinômios, seguirá da nossa discussão que qualquer limite lateral de f/g existe (ainda que seja infinito).

1 Funções racionais

De acordo com a Proposição 4 (um corolário da regra do quociente) da aula *Aplicação das Leis* do módulo anterior, se r é uma função racional, então $\lim_{x \rightarrow a} r(x)$ pode ser calculado por meio de uma mera substituição, caso a seja um ponto no domínio maximal de definição da função r^1 : $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$. Dessa forma, vejamos dois exemplos com ausência dessa hipótese simplificadora.

Exemplo 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$.

Solução. Perceba que o ponto 2 não pertence ao domínio maximal da função racional r definida por $r(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10}$, uma vez que aquele ponto é uma raiz do polinômio do denominador: $2^2 + 3 \cdot 2 - 10 = 0$. Isso nos impede de utilizar diretamente a regra do quociente. Por outro lado, como $2^3 - 2^2 - 4 = 0$, 2 também é uma raiz do polinômio do numerador, de sorte que $x - 2$ é um fator comum daqueles polinômios². De fato, vale $x^3 - x^2 - 4 = (x - 2)(x^2 + x + 2)$ e $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$, de modo que, para cada x no domínio de r (isto é, para cada $x \neq 2$), temos

$$\frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 + x + 2)}{\cancel{(x-2)}(x + 5)} = \frac{x^2 + x + 2}{x + 5}.$$

¹Lembre-se de que, se $r = f/g$, então o domínio maximal D_r da função r consiste do complementar do conjunto das raízes de g , ou seja, $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

²Vide, adiante, Teorema de D’Alembert.

Perceba que expressamos a função r em termos de uma função racional que, agora, admite 2 como um ponto no seu domínio (nesse caso, recuperamos a hipótese simplificadora!). Isso nos permite levar o cálculo adiante, por meio da regra da substituição:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 2}{x + 5} \\ &= \frac{2^2 + 2 + 2}{2 + 5} \\ &= \frac{8}{7}.\end{aligned}$$

□

Em geral, se f e g são polinômios tais que $f(a) = g(a) = 0$, é possível obter fatorações $f(x) = (x - a)F(x)$ e $g(x) = (x - a)G(x)$, com F e G também polinômios; por sua vez, isso nos permite escrever

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x - a)}F(x)}{\cancel{(x - a)}G(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)},$$

caso os limites existam.

A “técnica” acima se apoia no seguinte resultado, conhecido como o *teste da raiz*.

Teorema 2 (D’Alembert). *Um polinômio $p(x)$ admite o número real a como raiz se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x - a$. De outro modo, vale $p(a) = 0$ se, e só se, existe um polinômio $P(x)$ tal que $p(x) = (x - a)P(x)$.*

Prova. Para todo j natural, temos a fatoração

$$x^j - a^j = (x - a)p_{j,a}(x),$$

em que $p_{j,a}(x) = \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k} a^k$. Realmente,

$$\begin{aligned}
(x-a)p_{j,a}(x) &= (x-a) \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k} a^k \\
&= x \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k} a^k - a \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k} a^k \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-k} a^k - \sum_{k=0}^{j-1} x^{j-1-k} a^{k+1} \\
&= x^j - a^j,
\end{aligned}$$

uma vez que as demais parcelas dos dois somatórios cancelam-se. Portanto, se $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$, temos

$$\begin{aligned}
p(x) - p(a) &= \sum_{j=0}^n a_j x^j - \sum_{j=0}^n a_j a^j \\
&= \sum_{j=1}^n a_j (x^j - a^j) \\
&= \sum_{j=1}^n a_j (x-a)p_{j,a}(x) \\
&= (x-a) \sum_{j=1}^n a_j p_{j,a}(x),
\end{aligned}$$

de forma que $p(x) = (x-a)P(x) + p(a)$, em que $P(x) = \sum_{j=1}^n a_j p_{j,a}(x)$. Daí, é imediato que $p(a) = 0$ se, e somente se, $p(x) = (x-a)P(x)$. \square

Corolário 3. Se $p(x)$ é um polinômio não identicamente nulo e a é um número real, então existe um único inteiro não-negativo k para o qual $p(x) = (x-a)^k Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinômio satisfazendo $Q(a) \neq 0$.

Prova. Seja n o grau do polinômio p . Se a não é uma raiz de p , tome $k = 0$ e $Q = p$. Se a é uma raiz de p , o conjunto A dos números naturais m tais que $(x-a)^m$ divide $p(x)$ é não-vazio,

pois $1 \in A$, pelo Teorema de D'Alembert, e cada um dos seus elementos não supera n (o grau do divisor não supera o grau do dividendo, se o dividendo não for identicamente nulo). Portanto, o conjunto A admite um maior elemento k , de forma que $p(x) = (x - a)^k Q(x)$, para algum polinômio $Q(x)$. Só falta verificar que $Q(a) \neq 0$. Ora, se tivéssemos $Q(a) = 0$, o Teorema de D'Alembert nos permitiria escrever $Q(x) = (x - a)R(x)$, para algum polinômio $R(x)$, implicando $p(x) = (x - a)^{k+1}R(x)$, ou seja, $(x - a)^{k+1}$ dividiria $p(x)$, contradizendo a maximalidade de k . Portanto, $Q(a) \neq 0$, como queríamos. \square

Nas condições do corolário acima, diremos que k é a *multiplicidade* de a como uma raiz de $p(x)$ ³, o que denotaremos por $k = m_{a,p}$. Para efeito de ilustração, em relação aos polinômios $f(x) = x^3 - x^2 - 4$ e $g(x) = x^2 + 3x - 10$, analisados no primeiro exemplo, encontramos $m_{2,f} = m_{2,g} = 1$.

Com essa terminologia, se f e g são polinômios, a discussão do limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se resume à análise das multiplicidades de a como raízes de f e g :

1. Se $m_{a,f} > m_{a,g}$, teremos $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (grosso modo, quando $x \rightarrow a$, f tende a zero mais rapidamente que g).
2. Caso as multiplicidades coincidam, $m_{a,f} = m_{a,g} = k$, o cancelamento do fator $(x - a)^k$ nos permitirá aplicar a regra da substituição (como no Exemplo (1)).
3. Se $m_{a,f} < m_{a,g}$, a aplicação do 1º caso implica $\frac{g(x)}{f(x)} \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow a$, nos indicando que $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$. Como veremos abaixo, embora o limite bilateral $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ possa não existir, os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x)}{g(x)}$ existem e são infinitos.

³Perceba que as expressões “ a é raiz de multiplicidade 0 de p ” e “ a não é raiz de p ” são sinônimas.

O ponto 3 é o único que exige resultados auxiliares em seu tratamento. Retornaremos a essa questão logo após o

Exemplo 4. *Determine as assíntotas verticais para o gráfico da função f definida pela regra $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x-3}$.*

Solução. Lembre-se de que a reta vertical $x = a$ é uma assíntota vertical para o gráfico de f se algum limite lateral de f em a for infinito: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

Sendo $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, temos que $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ é o domínio maximal de definição da função f , de onde segue que as possíveis assíntotas verticais para o gráfico de f são as retas $x = -1$ e $x = 3$.

Começemos analisando o limite lateral à direita de f no ponto 3. Primeiramente, se $x > 3$, então o denominador $(x+1)(x-3)$ é positivo, ao mesmo tempo em que o numerador $1-x$ é negativo. Assim, pela regra dos sinais, $f(x)$ é negativo, para todo x maior que 3. Como $(x+1)(x-3)$ tende a 0 e $1-x$ tende a -2 , quando $x \rightarrow 3^+$, esperamos que $|f(x)|$ tenda a $+\infty$ quando $x \rightarrow 3^+$, o que nos leva a conclusão de que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$, confirmando que a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical para o gráfico de f .

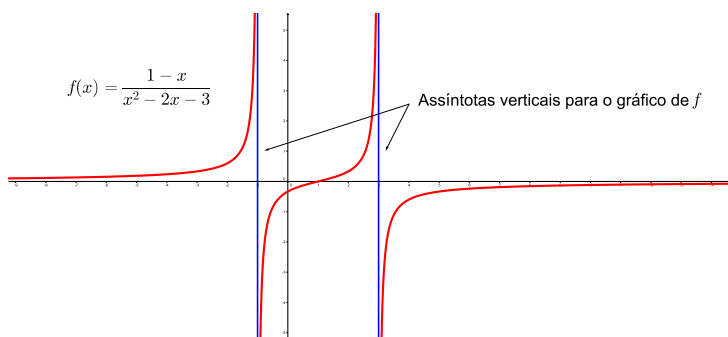
Muito embora justificar formalmente que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ não seja complicado, omitiremos tal justificativa aqui, pelo fato dela ser um caso particular do nosso próximo resultado, a saber, a Proposição 5.

De modo similar, podemos verificar que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ e, mais ainda, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \pm\infty$, de onde se vê que a reta $x = -1$ também é uma assíntota vertical para o gráfico de f .

Esboçamos tal gráfico na figura a seguir.

□

Proposição 5. *Sejam $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Suponhamos que, para todo x suficientemente próximo de a (e diferente de a), $g(x)$ tenha um mesmo sinal (positivo ou*



negativo). Assim, se $\sigma \in \{-, +\}$ é o sinal de $kg(x)$ (para aqueles x próximos de a), então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \sigma \infty.$$

Valem resultados análogos com limites laterais.

Se escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^-$) caso $g(x)$ tenda a 0 por valores positivos (resp. negativos), quando x tende ao ponto a , a proposição anterior nos sugere as seguintes convenções:

$$\frac{k}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } k > 0, \\ -\infty, & \text{se } k < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{k}{0^-} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } k > 0, \\ +\infty, & \text{se } k < 0 \end{cases}.$$

É importante frisar que as expressões $\frac{k}{0^\pm}$ não têm sentido aritmético (são apenas abreviações), mas possibilitam estender a validade da regra do limite do quociente nas condições previstas na Proposição 5. Por exemplo, em referência à função $f(x) = \frac{1-x}{x^2-2x-3}$ do exemplo anterior, temos $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1-x}{x^2-2x-3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$.

A proposição acima é uma consequência do resultado a seguir, uma versão para limites do seguinte fato intuitivo: *o inverso de uma quantidade cada vez menor é cada vez maior*.

Teorema 6. *Suponhamos que h seja uma função definida num intervalo aberto perfurado $I \setminus \{a\}$, com $h(x) > 0$, para cada $x \in I \setminus \{a\}$. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = +\infty.$$

Analogamente, se $h(x) < 0$, para cada $x \in I \setminus \{a\}$, então,

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = -\infty.$$

Ademais, valem resultados similares com limites laterais.

Prova. Vamos utilizar a definição de limite, provando que, se h é positiva em $I \setminus \{a\}$, então $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = +\infty$. (A validade dos demais limites pode ser estabelecida de modo análogo.)

Para tal, devemos verificar que, dado $M > 0$ arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que $x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{h(x)} > M$. Ora, como h é positiva, a desigualdade $\frac{1}{h(x)} > M$ equivale a $h(x) < \frac{1}{M}$. Sendo $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, tomamos $\varepsilon = 1/M$ na definição de limite para obter $\delta > 0$ satisfazendo $x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |h(x) - 0| < \frac{1}{M}$, ou seja, $x \in I, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{h(x)} > M$, como queríamos. \square

Prova da Proposição 5. Para fixar as ideias, podemos supor que k é negativo e $g(x)$ é positivo, para todo x suficientemente próximo de a (com $x \neq a$). Devemos, então, provar que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Primeiramente, tomando $h = g/f$, afirmamos que $h(x) < 0$, para todo x suficientemente próximo de a . Com efeito, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k < 0$, o lema de permanência do sinal (veja o Lema 4 da aula *Leis do Limite - Parte 1*) nos garante que $f(x) < 0$, para todo x suficientemente próximo de a , de onde segue a afirmação. Pela regra do quociente, vem $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$, o que, pelo teorema anterior, nos dá

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = -\infty, \text{ isto é, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

As demonstrações dos demais casos são análogas. \square

Agora, se f e g são funções polinomiais com $f(a) \neq 0$ e $g(a) = 0$, afirmamos que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

Para isso, basta escrever $g(x) = (x - a)^n G(x)$, $G(a) \neq 0$ (vide Corolário 3). Desse modo, como $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{G(x)}}{(x-a)^n}$ e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{G(x)} = \frac{f(a)}{G(a)} \neq 0$, as afirmações seguem, por meio da Proposição 5, atentando-se aos limites abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a)^n = 0^+,$$

se n é par, e

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (x - a)^n = 0^- \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^+} (x - a)^n = 0^+,$$

se n é ímpar.

Exemplo 7. Calcule os limites:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right].$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right].$$

Solução. Com um pouco de manipulação algébrica, obtemos as seguintes expressões para as funções cujos limites desejamos calcular:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

e

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{x+2}{x^2+x+2}.$$

Portanto, para o item (i),

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

enquanto, para (ii),

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{3}{3} = 1.$$

□

De acordo com a aula *O Problema da Tangente* do módulo de Introdução ao Cálculo - Limites - Parte 1, o valor

$$m_r(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x) - r(a)}{x - a}$$

é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função r no ponto $(a, r(a))$, desde que o referido limite exista (e seja finito).

Da discussão acima, por cada ponto $(a, r(a))$ do gráfico de uma função racional r passa uma reta tangente. De fato, se $r = p/q$, então

$$\begin{aligned} \frac{r(x) - r(a)}{x - a} &= \frac{\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(a)}{q(a)}}{x - a} \\ &= \frac{p(x)q(a) - p(a)q(x)}{q(a)q(x)(x - a)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Agora, note que a multiplicidade de a como raiz do polinômio $p(x)q(a) - p(a)q(x)$ é pelo menos 1, ao mesmo tempo em que o polinômio $q(a)q(x)(x - a)$ admite a como raiz de multiplicidade 1. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x) - r(a)}{x - a}$ existe e é finito, como havíamos afirmado.

A próxima proposição nos fornece fórmulas para o cálculo dos coeficientes angulares $m_r(x)$ no caso em que r é uma função polinomial, ou, mais geralmente, uma função racional.

Proposição 8. *Sejam p e q funções polinomiais, com $q \neq 0$.*

i) Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, então

$$m_p(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1. \quad (2)$$

ii) Se $r = p/q$, então

$$m_r(x) = \frac{m_p(x)q(x) - p(x)m_q(x)}{q(x)^2}. \quad (3)$$

Prova. Nas notações da prova do Teorema de D'Alembert 2, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x) - p(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \sum_{j=1}^n a_j p_{j,a}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \lim_{x \rightarrow a} a_j p_{j,a}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j p_{j,a}(a) \\ &= \sum_{j=1}^n j a_j a^{j-1}, \end{aligned}$$

uma vez que

$$p_{j,a}(a) = \sum_{k=0}^{j-1} a^{j-1-k} a^k = \sum_{k=0}^{j-1} a^{j-1} = \sum_{j=1}^n j a_j a^{j-1}.$$

Isso estabelece a fórmula (2).

Em relação à fórmula (3), a igualdade (1) nos dá

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x) - r(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)q(a) - p(a)q(x)}{q(a)q(x)(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)q(a) - p(a)q(a) + p(a)q(a) - p(a)q(x)}{q(a)q(x)(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{p(x)-p(a)}{x-a}\right) q(a) - p(a) \left(\frac{q(x)-q(a)}{x-a}\right)}{q(a)q(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{p(x)-p(a)}{x-a}\right) q(a) - p(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{q(x)-q(a)}{x-a}}{q(a) \lim_{x \rightarrow a} q(x)} \\ &= \frac{m_p(a)q(a) - p(a)m_q(a)}{q(a)^2}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Exemplo 9. Em relação à função racional $r = \frac{p}{q}$, se os polinômios p e q tiverem graus m e n , respectivamente, prove que o gráfico de r não admite mais que k retas tangentes mutuamente paralelas, em que $k = \max\{m + n - 1, 2n\}$ ⁴.

Prova. Primeiramente, observe que, de acordo com a fórmula (2), $m_p(x)$ é uma função polinomial de grau $m-1$ (o antecessor do grau de $p(x)$). Desse modo, fixada uma inclinação m_0 , vejamos agora que a equação $m_r(x) = m_0$ admite, no máximo, k soluções, o que encerrará a demonstração. Ora, a relação (3) nos assegura que $m_r = P/Q$, sendo os graus de P e Q iguais a $m + n - 1$ e $2n$, respectivamente. Portanto, a equação $m_r(x) = m_0$ tem as suas soluções entre as raízes da equação $P(x) = m_0Q(x)$, que tem grau k , no máximo. Como uma equação polinomial de grau t admite, no máximo, t raízes reais, nada mais há a fazer. \square

Se uma função admite em cada ponto de um arco do seu gráfico uma reta tangente com inclinação positiva, é razoável esperar que essa função seja crescente no subdomínio correspondente. Estabeleceremos esse fato para funções cúbicas no exemplo abaixo, fazendo uso da desigualdade

$$x^2 + xy + y^2 \geq 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad (4)$$

a qual é válida para x e y reais quaisquer.

Se I é um intervalo, seja \bar{I} o intervalo fechado de mesmos extremos que I (por exemplo, se $I = (2, +\infty)$, então $\bar{I} = [2, +\infty)$).

Exemplo 10. Considere a função cúbica $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, com $x \in \mathbb{R}$. Se as retas tangentes ao gráfico de f tiverem inclinações positivas (resp. negativas) em cada um dos pontos de abscissa pertencente ao intervalo I (ou seja, $m_f(x) > 0$, para todo $x \in I$), prove que f é crescente (resp. decrescente) em \bar{I} .

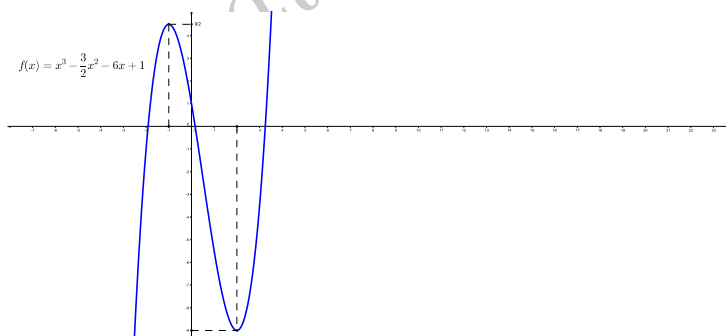
⁴Caro leitor, observe o gráfico da função do Exemplo 4 e procure quatro retas paralelas e tangentes ao gráfico da função f .

Prova. Devemos verificar que $x, y \in \bar{I}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, ou ainda, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > 0$. Ora, levando em conta que $\frac{x+y}{2} \in I$, bem como a fórmula (2) e a desigualdade (4), temos

$$\begin{aligned} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= (x^2 + xy + y^2) + b(x + y) + c \\ &\geq 3\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + 2b\left(\frac{x + y}{2}\right) + c \\ &= m_f\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

como desejado. □

O exemplo anterior nos auxilia a esboçar o gráfico de uma função cúbica. Por exemplo, seja $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$. Como $m_f(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3(x + 1)(x - 2)$, vemos que m_f é positiva nos intervalos $(-\infty, -1)$ e $(2, +\infty)$, ao passo que m_f é negativa no intervalo $(-1, 2)$. Segue do exemplo acima que f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[2, +\infty)$, e decrescente no intervalo $[-1, 2]$.



Observação 11. Em relação à função cúbica que acabamos de tratar, $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$, vale a pena observar, em conformidade com a aula Monotonicidade, Máximos e

Mínimos do módulo de *Introdução ao Cálculo - Funções - Parte 1*, que -1 e 2 são pontos de máximo e mínimo locais, respectivamente.

2 Mais alguns limites

Vejam alguns exemplos das videoaulas.

Exemplo 12. *Calcule:*

$$i) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}.$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7}.$$

$$iii) \lim_{t \rightarrow 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}.$$

Prova. Em cada um dos itens acima, a tentativa da aplicação direta da regra do quociente nos leva à indeterminação $\frac{0}{0}$; devemos, pois, contorná-la. Talvez não pareça, mas todos esses exemplos são casos particulares do limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{x-a},$$

em que f é um polinômio tal que $f(a) > 0$. Como

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)}} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a},$$

segue imediatamente das regras aritméticas de limites (vide 1ª e 2ª aulas do módulo anterior) que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}}{x-a} = \frac{m_f(a)}{2\sqrt{f(a)}}.$$

Analisemos, agora, os itens i), ii) e iii).

i) Temos $a = 0$, $f(h) = 1 + h$ e $m_f \equiv 1$, de onde segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

ii) Aqui, $a = 7$, $f(x) = x + 2$ e $m_f \equiv 1$, de forma que

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

iii) Começamos calculando $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9}$, que segue do caso geral apresentado tomando-se $a = 9$ e $f(t) = t$, de modo que $m_f \equiv 1$ e $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 9} \frac{\sqrt{t} - 3}{t - 9}} = 6.$$

□

Exemplo 13. Se m e n são números naturais, encontre o valor do limite abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{x^2}.$$

Prova. Inspirados pelo item (c) do Exemplo 3 da última aula do módulo anterior, comecemos calculando $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2}$.

Nas notações da demonstração do Teorema de D'Alembert 2, temos

$$\begin{aligned} \cos x - 1 &= (\sqrt[m]{\cos x})^m - 1^m \\ &= (\sqrt[m]{\cos x} - 1)p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos x}), \end{aligned}$$

de forma que

$$\frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} = \frac{1}{p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos x})} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}. \quad (5)$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos x}) = p_{m,1}(\sqrt[m]{\cos 0}) = m$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

pelo item (a) daquele mesmo Exemplo 3, concluímos da relação (5) que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2m}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[n]{\cos x} - 1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos x} - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{\cos x} - 1}{x^2} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

□

Dicas para o Professor

É interessante priorizar a interpretação e a aplicação dos resultados teóricos desenvolvidos nessa aula frente à apresentação das suas demonstrações, o que pode ser feito no 2º ou 3º encontro.

Antes de iniciar as resoluções dos exemplos, procure destacar as principais ideias envolvidas nos argumentos. Em seguida, é fortemente recomendável incentivar os alunos a produzirem as suas próprias soluções, indicando, se necessário, uma estratégia argumentativa. Finalmente, sugerimos que as resoluções sejam apresentadas em detalhes e problemas correlatos sejam discutidos com a turma.

Dessa forma, três sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
2. H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. 6^a ed. LTC, 2018.

Portal OBMEP