Material Teórico - Módulo de Geometria Espacial 2 - Volumes e Áreas de Prismas e Pirâmides

Volumes e o Princípio de Cavalieri

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Volume

O volume de uma figura é uma medida do espaço que essa figura ocupa, ou seja, uma medida de seu *conteúdo*. Uma definição precisa de volume envolve noções de uma área da Matemática avançada chamada *Teoria da Medida*. Procurando manter a discussão em um nível elementar, nos limitaremos a exibir uma formalização de algumas das ideias de Euclides de Alexandria (sec.III aC) sobre volume, usando notação e nomenclatura modernas.

Como o leitor provavelmente já sabe, Euclides escreveu uma obra célebre chamada *Os Elementos*, dividida em treze livros (capítulos). Nesta aula, exibiremos alguns teoremas dos livros XI e XII dos *Elementos*.

Supõe-se que existe uma **função volume** v, que associa a cada figura P no espaço um número $v(P)$ de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições:

(i) $v(P) \geq 0$;

(ii) $v(P) = 0$ se P está contida em algum plano;

(iii) Figuras congruentes têm o mesmo volume;

(iv) Se $P = P_1 \cup \cdots \cup P_n$ e, para $i \neq j$, $P_i \cap P_j$ está contido em um plano, então $v(P) = v(P_1) + \cdots + v(P_n)$;

(v) Se $P_1 \subset P_2$, então $v(P_1) \leq v(P_2)$;

(vi) Se C é um cubo de aresta 1, então $v(C) = 1$.

Na definição acima é possível suprimir-se o item (v), pois este é uma consequência dos itens (i) e (iv). De fato, se $P_1 \subset P_2$, então $P_2 = P_1 \cup (P_2 \setminus P_1)$, onde $P_2 \setminus P_1$ é o conjunto dos pontos que estão em P_2 mas não em P_1. Aplicando sucessivamente os resultados dos itens (iv) e (i), obtemos

$$v(P_2) = v(P_1) + v(P_2 \setminus P_1) \geq v(P_1).$$

O teorema a seguir ilustra, em linguagem moderna, como os gregos lidavam com os números irracionais, usando um procedimento indireto conhecido como o *método da exaustão*. Segundo o próprio Euclides, esse método é devido ao astrônomo, filósofo e matemático grego Eudoxo de Cnido (408 aC - 355 aC), um membro da lendária Academia de Platão.

Teorema 1. *Se B é um cubo de aresta a, então $v(B) = a^3$.*

Prova. Suponha primeiro que a é um número racional, ou, na linguagem da época de Eudoxo, que a é *comensurável* com a aresta do cubo unitário C. Isso significa que existe um número real u tal que $mu = 1$ e $nu = a$. Logo, particionando cada aresta de C em m partes iguais, dividimo-lo em m^3 cubos congruentes, todos de aresta u. Se V_0 é o volume de cada um desses cubos, então $m^3 V_0 = 1$, ou seja, $V_0 = \frac{1}{m^3}$.

Da mesma forma, é possível particionar o cubo B (de aresta a) em n^3 cubos de aresta u, todos congruentes e todos com volume igual a V_0. Dessa forma,

$$v(B) = n^3 V_0 = n^3 \cdot \frac{1}{m^3} = \left(\frac{n}{m}\right)^3 = a^3.$$

Se a não é racional, deve-se usar o método da exaustão, que funciona da seguinte forma. Primeiramente, para cada n natural, existe m natural tal que

$$\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}.$$

Observa-se que $a - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}$ e $\frac{m+1}{n} - a < \frac{1}{n}$. Assim, $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ são aproximações *por falta* e *por excesso* de a, respectivamente, cujas precisões são controladas por n: quanto maior o valor de n, melhor são tais aproximações.

Como $\frac{m}{n} < a$, o cubo B_n de aresta $\frac{m}{n}$ está contido em B, logo,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = v(B_n) \leq v(B).$$

De modo análogo, o cubo B_n', de aresta $\frac{m+1}{n}$, contém B, logo,

$$v(B) \leq v(B_n') = \left(\frac{m+1}{n}\right)^3.$$

Segue do raciocínio acima que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 \leq V(B) \leq \left(\frac{m+1}{n}\right)^3.$$

Por outro lado, $\frac{m}{n} < a < \frac{m+1}{n}$ também implica

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 < a^3 < \left(\frac{m+1}{n}\right)^3,$$

de forma que

$$\begin{aligned} |V(B) - a^3| &\leq \left(\frac{m+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{m}{n}\right)^3 \\ &= \frac{3m^2 + 3m + 1}{n^3} < \frac{9m^2}{n^3}. \end{aligned}$$

Mas, como $3m^2 + 3m + 1 < 9m^2$ e $m < na$, segue dos cálculos acima que

$$|V(B) - a^3| < \frac{9m^2}{n^3} < \frac{9(na)^2}{n^3} = \frac{9a^2}{n}.$$

Se $V(B) \neq a^3$, então $|V(B) - a^3| > 0$. Então, essa última igualdade equivale a

$$n < \frac{9a^2}{|V(B) - a^3|}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Isso é claramente um absurdo, uma vez que podemos escolher um natural maior que $\frac{9a^2}{|V(B)-a^3|}$. Logo, devemos ter $V(B) = a^3$. □

A prova acima pode ser adaptada *mutatis mutandis*[1] para se demonstrar o resultado a seguir. Convém lembrar que um paralelepípedo é um prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos. No caso em que as bases são retângulos e as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases, o paralelogramo é chamado reto retângulo.

Teorema 2. *Se P é um paralelepípedo reto retângulo de arestas a, b e c, então $v(P) = abc$.*

O próximo passo é calcular o volume de um paralelepípedo qualquer.

Teorema 3 (Elementos, XI-28)**.** *Um paralelepípedo é cortado ao meio pelo plano que passa por duas de suas arestas opostas.*

Prova. Nas notações da figura 1, deve-se mostrar que os prismas $ABEDCH$ e $GCHFBE$ são congruentes.

Sendo faces opostas de um mesmo paralelepípedo, os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ são congruentes, o mesmo ocorrendo com os paralelogramos $ADHE$ e $BCGF$. A diagonal EB divide o paralelogramo $ABFE$ em dois triângulos congruentes: ABE e FBE, o mesmo ocorrendo em relação à diagonal CH, que divide o paralelogramo $CDHG$ em dois triângulos congruentes: CDH e CGH.

Os dois prismas em questão têm ainda uma face em comum, o paralelogramo $BCHE$. São, portanto, congruentes e, em particular, têm o mesmo volume. □

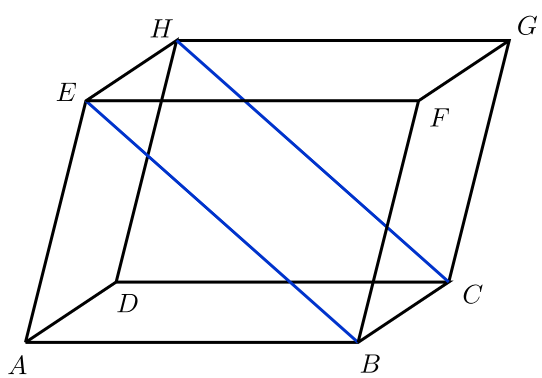

Figura 1: um plano dividindo um paralelepípedo ao meio.

A bem da clareza do enunciado do próximo resultado, sugerimos ao leitor olhar a figura 2, na qual consideraremos os paralelepípedos que têm o paralelogramo $ABCD$ como base comum e os paralelogramos $EFGH$ e $IJKL$ como bases opostas.

Teorema 4 (Elementos, XI-29)**.** *Paralelepípedos que têm a mesma base, a mesma altura e tais que as extremidades das arestas laterais são pontos colineares, têm o mesmo volume.*

Prova. Comparando os lados de paralelogramos que são faces dos paralelepípedos dados, obtemos as seguintes igualdades:

$$\overline{IJ} = \overline{AB} = \overline{EF}, \ \ \overline{LK} = \overline{CD} = \overline{GH}.$$

Valem ainda as igualdades:

$$\overline{IE} = \overline{IJ} - \overline{EJ} = \overline{EF} - \overline{EJ} = \overline{JF},$$

$$\overline{LH} = \overline{LK} - \overline{HK} = \overline{GH} - \overline{HK} = \overline{KG}.$$

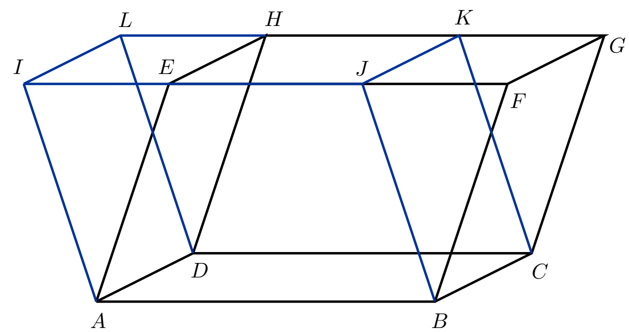

Figura 2: dois paralelepípedos com mesma base e com os "topos" alinhados.

Os paralelogramos $ADHE$ e $BCGF$ são congruentes, assim como o são os paralelogramos $ADLI$ e $BCKJ$. Juntando todas essas informações, vemos que os prismas $AEIDHL$ e $BFJCGK$ são congruentes; em particular têm o mesmo volume V. Dessa forma, se V_0 é o volume do sólido $ABCDEJKH$, então os dois paralelepípedos que estamos considerando têm volume igual a $V + V_0$. □

Teorema 5 (Elementos, XI-30)**.** *Paralelepípedos que têm a mesma base e a mesma altura têm o mesmo volume.*

Prova. Observando a figura 3, percebe-se que o paralelepípedo azul tem o mesmo volume que o paralelepípedo vermelho, devido ao Teorema 4. O mesmo vale para os paralelepípedos verde e vermelho. Assim, os paralelepípedos verde e azul têm o mesmo volume. □

Para o que segue, dizemos que duas figuras são **equidecomponíveis** se for possível dividir uma delas em um número finito de partes, que, reorganizadas, resultam exatamente na outra.

Na demonstração do próximo teorema, utilizaremos sem demonstração o seguinte resultado da geometria plana, conhecido como Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien[2]:

[1] Expressão latina que significa *mudando o que precisa ser mudado.*

[2] Após William Wallace (1768-1843), Farkas Bolyai (1775-1856) e Paul Gerwien. O resultado é mais geral: vale para quaisquer dois polígonos simples.

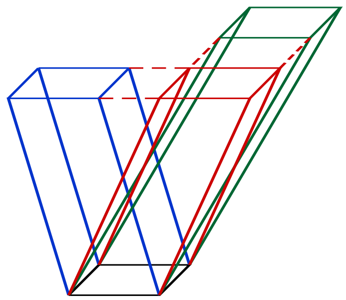

Figura 3: comparando três paralelepípedos com bases iguais.

Dois paralelogramos têm a mesma área se, e somente se, são equidecomponíveis.

Teorema 6 (Elementos, XI-31). *Paralelepípedos que têm a mesma altura e bases com a mesma área têm o mesmo volume.*

Prova. Sejam P_1 e P_2 os dois paralelepípedos em questão. As bases B_1 e B_2 de P_1 e P_2, respectivamente, são paralelogramos que supomos terem a mesma área.

Substituindo P_1 ou P_2, se necessário, por paralelepípedos retângulos com a mesma base e a mesma altura, pode-se supor que os dois paralelepípedos dados são retângulos.

Agora, como B_1 e B_2 têm a mesma área, são equidecomponíveis. Mais precisamente, é possível escrever $B_1 = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ como união de n partes disjuntas, de modo que $B_2 = C_1 \cup \cdots \cup C_n$.

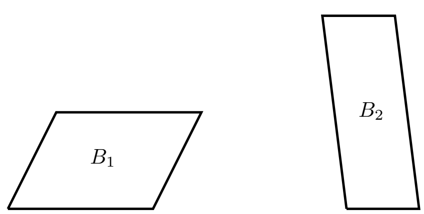

Figura 4: as duas bases B_1 e B_2 têm a mesma área.

Tais decomposições de B_1 e B_2 induzem decomposições naturais de P_1 e P_2 em paralelepípedos retângulos $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$, tais que $P_1 = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n$ e $P_2 = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_n$, sendo que, para $i \neq j$, os paralelepípedos Π_i e Π_j têm exatamente uma face em comum. Em particular, P_1 e P_2 têm o mesmo volume. □

Corolário 7. *O volume de um prisma é igual à área de sua base multiplicada por sua altura.*

Prova. Sejam P o prisma dado, B sua base e B' um paralelogramo de mesma área que B. Seja P' um paralelepípedo de base B' e mesma altura que P. Pelo Teorema 6, o volume de P é igual ao volume de P', que por sua vez é igual ao produto da área de B' (que é igual à área de B) pela altura de P' (que é igual à altura de P). □

O próximo passo é o cálculo do volume de uma pirâmide. De início, precisamos de um resultado análogo ao Teorema 6. Ao contrário do que ocorre com paralelepípedos, para a comparararação entre os volumes de duas pirâmides de mesma altura e cujas bases têm a mesma área, Euclides não usa equidecomposição, mas o princípio de Eudoxo (isto é, o método da exaustão).

Teorema 8 (Elementos, XII-5). *Pirâmides triangulares de mesma altura e cujas bases têm mesma área têm, necessariamente, o mesmo volume.*

Prova. Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ duas pirâmides de mesma altura, cujas bases BCD e $B'C'D'$ têm a mesma área. Sejam E, F, G, H, J, K os pontos médios das arestas de $ABCD$ (veja a figura 5).

A pirâmide $ABCD$ pode ser decomposta em quatro partes: as pirâmides menores $P_1 = AEFG$ e $P_2 = FBKH$ (que são congruentes e cujas arestas medem metade das arestas correspondentes em $ABCD$) e dois prismas triangulares $T_1 = EFGCHJ$ e $T_2 = DGJKFH$. O prisma T_1 está "em pé" enquanto o prisma T_2 está "deitado" sobre uma de suas faces laterais, qual seja, o paralelogramo $DJHK$, cuja área é igual ao dobro da área do triângulo CHJ (pois o segmento JK divide o paralelogramo $DKHK$ em dois triângulos congruentes a CHJ).

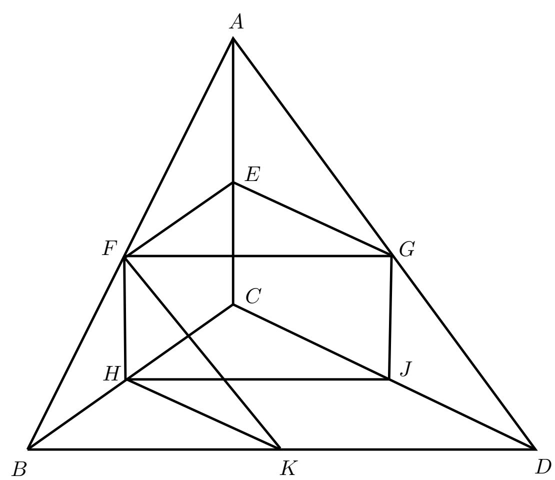

Figura 5: decomposição de uma pirâmide triangular.

Se ao prisma T_2 ajuntarmos outro prisma $\tilde{T}_2$ congruente a T_2, como na figura 6, obtemos um paralelepípedo cujo volume é o dobro do volume de T_2 e também é o dobro do volume de T_1, pois tem a mesma altura que T_1 e sua base tem área igual ao dobro da área da base de T_1. Dessa forma, T_1 e T_2 têm o mesmo volume[3].

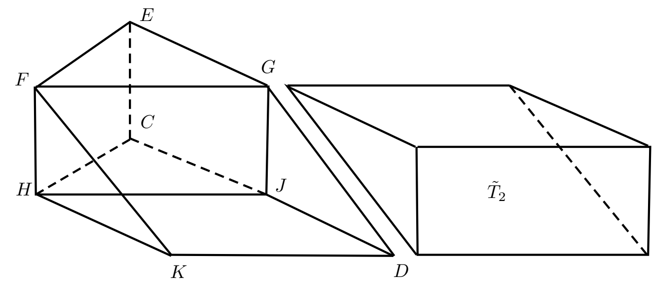

Figura 6: comparação entre as áreas dos prismas T_1 e T_2.

Mais ainda, como P_1 e T_1 têm a mesma base EFG e a mesma altura, o volume de T_1 é maior do que o volume de P_1, pois T_1 é um prisma, enquanto P_1 é uma pirâmide. Assim, a união $T_1 \cup T_2$ dos dois prismas possui volume maior do que a metade do volume da pirâmide $ABCD$.

Evidentemente, é possível fazermos uma decomposição análoga para a pirâmide $A'B'C'D'$, dividindo-a em duas pirâmides menores P'_1 e P'_2, congruentes, e dois prismas T'_1 e T'_2, de modo que o volume de $T'_1 \cup T'_2$ seja maior do que a metade do volume de $A'B'C'D'$.

Uma vez que as bases das pirâmides $ABCD$ e $A'B'C'D'$ têm a mesma área, os prismas (de mesma altura) T_1, T_2, T'_1 e T'_2 têm o mesmo volume (Teorema 6). Ademais, as pirâmides que sobram P_1, P_2 e P'_1, P'_2 têm bases com a mesma área.

É possível, então, repetir esse procedimento indutivamente, dividindo as pirâmides menores da mesma forma, de modo que mais do que a metade de seus volumes seja coberta pela união de dois prismas. Além disso, a cada repetição desse processo, a parte *residual* nas duas pirâmides originais, ou seja, a parte que corresponde a uma possível diferença entre os volumes iniciais, é dividida por 2.

Sejam V e V' os volumes das pirâmides $ABCD$ e $A'B'C'D'$, respectivamente. Se $V > V'$, então $V - V' > 0$. É possível repetir o procedimento descrito acima um número finito de vezes de tal modo que a parte residual em cada pirâmide tenha volume menor do que $V - V'$, o que é um absurdo, pois a diferença $V - V'$ é exatamente a diferença entre as partes residuais das decomposições nas duas pirâmides.

De modo análogo, a hipótese $V' > V$ conduz a uma contradição. Logo, $V = V'$. $\square$

Corolário 9 (Elementos, XII-7). *Uma pirâmide triangular tem volume igual a um terço do volume de um prisma triangular de mesma base e mesma altura.*

[3]Essa é a conclusão da Proposição 39 do livro XI dos Elementos.

Prova. Seja P a pirâmide triangular $DEFB$ e seja T o prisma triangular $ABCDEF$, com mesma base e mesma altura que P (veja a figura 7).

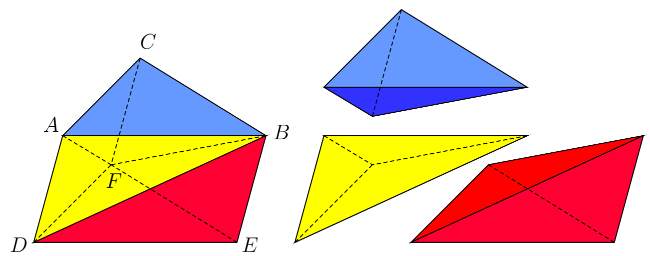

Figura 7: partição de um prisma em três pirâmides.

O prisma T pode ser dividido em três pirâmides, P, $P_1 = ABCF$ e $P_2 = ABDF$. Essas três pirâmides têm o mesmo volume. De fato, as pirâmides P e P_1 têm a mesma altura e suas bases, os triângulos ABC e DEF, são congruentes; logo, podemos aplicar o Teorema 8 para concluir que $v(P) = v(P_1)$. Por outro lado, a distância do ponto F ao plano que contém o paralelogramo $ABED$ pode ser considerada como altura comum das pirâmides P e P_2. Essas duas pirâmides têm bases ABD e BDE, que são triângulos congruentes, obtidos dividindo-se o paralelogramo $ABED$ pela diagonal BD. Assim, o Teorema 8 garante novamente que $v(P) = v(P_2)$.

Dessa forma, $v(P) + v(P_1) + v(P_2) = v(T)$ e $v(P) = v(P_1) = v(P_2)$ implicam $v(P) = \frac{1}{3} \cdot v(T)$. $\square$

2 O princípio de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) nasceu em Milão, onde recebeu o nome Francesco Cavalieri. Ao juntar-se à ordem dos jesuítas, em 20 de setembro de 1615, adotou o nome *Bonaventura*. Em 1616 foi transferido para a cidade de Pisa, onde mais tarde conheceu Galileu Galilei, tornando-se um de seus discípulos. Em 1635, publicou a *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quadam Ratione Promota* (Um Certo Método para o Desenvolvimento de uma Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos), onde aparece o princípio famoso que leva seu nome.

Para o enunciado do mesmo, consideremos dois sólidos A e B e um plano fixado α. Dado um plano β, paralelo a α, sejam $a(\beta)$ e $b(\beta)$ as áreas das figuras $A \cap \beta$ e $B \cap \beta$, respectivamente. Convencionamos considerar $a(\beta) = 0$ quando $A \cap \beta$ for vazio ou um ponto, o mesmo valendo para $b(\beta)$; em geral, $a(\beta) \geq 0$ e $b(\beta) \geq 0$

No que segue, enunciamos o Princípio de Cavalieri e apresentamos um argumento intuitivo para sua validade. Observe que, ao longo do mesmo, utilizamos o fato de que o volume de um cilindro reto de altura h e cuja base é uma região plana de área A é igual a Ah. Para uma demonstração, veja a referência [1].

Teorema 10 (Princípio de Cavalieri, 1635). *Sejam A, B e α como descritos acima. Se $a(\beta) = b(\beta)$ para cada plano β paralelo a α, então $v(A) = v(B)$.*

"Prova". Sejam $\beta_0, \ldots, \beta_n$ planos paralelos a α e, portanto, paralelos entre si, satisfazendo as seguintes condições (veja a figura 8):

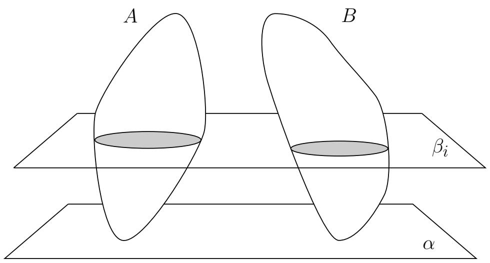

Figura 8: dois sólidos satisfazendo as hipóteses do Princípio de Cavalieri.

1. Para $i = 0$ e $i = n$, temos que $\beta_i \cap A$ e $\beta_i \cap B$ são pontos, isto é, β_0 e β_n são tangentes a A e a B.

2. A distância entre dois planos consecutivos β_i e β_{i+1} é $\delta = \frac{h}{n}$, onde h é a distância entre os planos β_0 e β_n.

Para $0 \leq i \leq n-1$, a parte do sólido A compreendida entre os planos β_i e β_{i+1} tem volume aproximadamente igual a $a(\beta_i)\delta$. A soma dos volumes dessas "fatias finas" é aproximadamente igual ao volume $v(A)$ do sólido A e essa aproximação se torna mais precisa à medida que aumentamos a quantidade n de fatias. O mesmo pode ser feito para o sólido B.

Dessa forma, dado um erro $\varepsilon > 0$, existe um natural n suficientemente grande tal que

$$\left| v(A) - \sum_{i=0}^{n-1} a(\beta_i)\delta \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\left| v(B) - \sum_{i=0}^{n-1} b(\beta_i)\delta \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observe agora que, por hipótese, temos $a(\beta_i) = b(\beta_i)$ para $0 \leq i \leq n-1$, de modo que

$$\sum_{i=0}^{n-1} a(\beta_i)\delta = \sum_{i=0}^{n-1} b(\beta_i)\delta.$$

Portanto, aplicando a desigualdade triangular para números reais[4], obtemos

$$\begin{aligned} |v(A) - v(B)| &= \left| v(A) - \sum_{i=0}^{n} a(\beta_i)\delta + v(B) - \sum_{i=0}^{n} b(\beta_i)\delta \right| \\ &\leq \left| v(A) - \sum_{i=0}^{n} a(\beta_i)\delta \right| + \left| v(B) - \sum_{i=0}^{n} b(\beta_i)\delta \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Supondo que $v(A) \neq v(B)$, seja $\varepsilon = |v(A) - v(B)| > 0$. Então, os cálculos acima nos dariam

$$|v(A) - v(B)| < \varepsilon = |v(A) - v(B)|,$$

o que é um absurdo! Logo, $v(A) = v(B)$. $\square$

Uma aplicação muito interessante (e importante) do Princípio de Cavalieri é a dedução, apresentada a seguir, da fórmula para o volume de uma esfera. Para tal utilizaremos, também sem demonstração, o fato de que o volume de um cone circular reto de área da base A e altura h é igual a $\frac{1}{3}Ah$ (tal fórmula pode ser obtida com o auxílio do princípio de Cavalieri, comparando o cone com uma pirâmide triangular de área da base A e altura h. Para mais detalhes, veja a referência [1]).

A ideia é comparar a esfera com um outro sólido, chamado *anti-clépsidra*, cujo volume é conhecido. Para tanto, consideramos uma esfera S de raio R e um cilindro C, com raio da base também igual a R e cuja altura é igual ao diâmetro $2R$ da esfera S. No interior desse cilindro, tomamos dois cones de altura R, cujas bases são círculos de raio R, posicionados de modo que seus vértices se toquem (figura 9). O sólido interior ao cilindro e exterior aos dois cones é chamado **anti-clépsidra**.

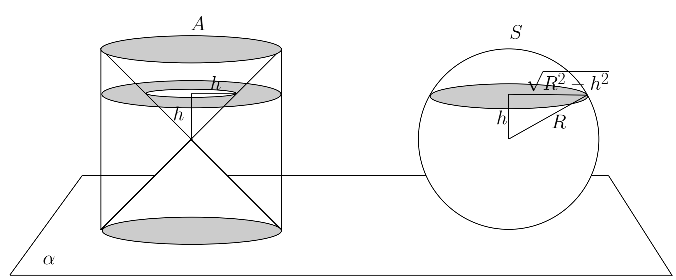

Figura 9: a esfera e a anti-clépsidra.

Supondo a esfera S e a anti-clépsidra A apoiados sobre um plano α, seja β um plano paralelo a α, cuja distância até o centro de S é igual a h.

[4]Recorde que tal desigualdade diz que $|x + y| \leq |x| + |y|$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

É imediato verificar que $A \cap \beta$ é uma coroa circular de raios h e R, ao passo que $S \cap \beta$ é um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$. Portanto, denotando por $a(\beta)$ e $s(\beta)$ as áreas de $A \cap \beta$ e $S \cap \beta$, respectivamente, temos

$$a(\beta) = \pi R^2 - \pi h^2$$

e

$$s(\beta) = \pi \left(\sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Assim, $a(\beta) = s(\beta)$ para qualquer plano β paralelo a α. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri o volume $v(S)$ da esfera é igual ao volume $v(A)$ da anti-clépsidra. Mas, uma vez que esse último volume é igual ao volume do cilindro C menos o dobro do volume de um dos cones retirados de C para formar A, temos

$$\begin{aligned} v(S) &= v(A) = \pi R^2 \cdot (2R) - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R \\ &= 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Dicas para o Professor

Quatro encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula. Caso você queira evitar o uso do princípio de Eudoxo, pode fazer no Teorema 1 apenas o caso em que a aresta tem medida racional, bem como pode simplesmente enunciar o Teorema 8.

A necessidade do emprego do método da exaustão na demonstração da Proposição XII-5 dos *Elementos* foi questionada por K. F. Gauss (1777-1855) em uma carta escrita para Gerling em 1844. Em 1900, o eminente matemático alemão David Hilbert (1862-1943) colocou essa questão como o terceiro problema de sua famosa lista de 23 problemas, apresentados no segundo Congresso Internacional de Matemáticos em Paris e conhecidos como os Problemas de Hilbert. Esse Terceiro Problema de Hilbert, foi resolvido ainda em 1900 por um de seus alunos, Max Dehn. A conclusão de Dehn é que não é possível estender para sólidos quaisquer o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, ou seja, dois sólidos podem ter o mesmo volume sem serem equidecomponíveis. Isso torna realmente necessário o uso do princípio de Eudoxo na demonstração da Proposição XII-5, como fez Euclides. Você pode usar este material como motivação para o estudo do Terceiro Problema de Hilbert e consultar as sugestões de leitura complementar 3 e 4 para obter mais detalhes.

O Princípio de Cavalieri pode ser usado como alternativa para a obtenção do volume de prismas. Essa ideia foi explorada nas vídeo-aulas. Para o cálculo do volume da esfera é necessário que o aluno já conheça as fórmulas dos volumes do cilindro e do cone, que podem ser apresentadas como análogas das fórmulas para os volumes de prismas e pirâmides.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*. Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2014.
2. Euclides. *Os Elementos*, trad. Irineu Bicudo. São Paulo, Ed. Unesp, 2009.
3. R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Nova Iorque, Springer, 2000.
4. M.Aigner e G.M.Ziegler. *As Provas Estão n'O Livro*. São Paulo, Edgard Blucher, 2016.