Material Teórico - Módulo Resolução de Exercícios

Frações - Parte 2

Sexto Ano

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

28 de junho de 2021

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Exercícios variados

Neste material, apresentamos exercícios variados sobre múltiplos e divisores de números inteiros, frações, números decimais e porcentagem.

Exemplo 1 (Colégio Pedro II). Rosinha pagou R$67,20 por uma blusa que estava sendo vendida com desconto de 16%. Quanto suas amigas souberam, correram para a loja e tiveram a triste notícia que o desconto já havia acabado. O preço encontrado pelas amigas de Rosinha foi:

(a) R$ 70,00.

(b) R$ 75,00.

(c) R$ 80,00.

(d) R$ 85,00.

Solução. Note que R$ 67,20 correspondem a $100\% - 16\% = 84\%$ do preço original, pois esse valor corresponde ao preço da blusa após o desconto de 14% ser aplicado. Logo, como as amigas chegaram à loja depois que o desconto havia acabado, elas encontraram o preço original da blusa, que era

$$67{,}20 \div 0{,}84 = 6720 \div 84 = 80 \text{ reais.}$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(c)**. □

Exemplo 2 (CMRJ). Magda foi informada, em dezembro de 2013, que a mensalidade do seu curso de francês a partir de janeiro de 2014 teria um aumento de 60%. Ela não concordou com o aumento e procurou o PROCON, que, após analisar o caso, determinou que o curso desse um desconto de 15% em relação ao valor da nova mensalidade. O curso acatou a decisão do PROCON. Como Magda é professora do CMRJ, o curso, voluntariamente, decidiu dar-lhe 10% de desconto sobre o valor que havia sido determinado pelo PROCON. Dessa forma, o aumento da mensalidade do curso de francês do ano de 2013 para o ano de 2014 passou a ser, em percentual, um número compreendido entre:

(a) 34 e 36.

(b) 25 e 26.

(c) 23 e 24.

(d) 24 e 25.

(e) 22 e 23.

Solução. Denotemos por X o valor da mensalidade em dezembro de 2013. Com o aumento de 60% anunciado para janeiro de 2014, o valor da mensalidade a partir desse mês passaria a ser

$$(1 + 0{,}60)X = 1{,}6X.$$

Porém, com o desconto de 15% concedido pelo PROCON, o valor da mensalidade passou a ser

$$(1 - 0{,}15) \cdot 1{,}6X = 0{,}85 \cdot 1{,}6X = 1{,}36X.$$

Uma vez que a professora Magda ainda ganhou um desconto adicional de 10% sobre o preço que havia sido determinado pelo PROCON, a mensalidade, a partir de janeiro de 2014, passou a ser

$$(1 - 0{,}10) \cdot 1{,}36X = 0{,}9 \cdot 1{,}36X = 1{,}224X = (1 + 0{,}224)X.$$

Portanto, o aumento percentual da mensalidade de dezembro de 2013 para janeiro de 2014 foi de 22,4%, que está compreendido entre 22% e 23%. Assim, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Exemplo 3 (CMRJ). O professor Thiago foi visitar o professor Flávio em sua residência. Flávio é professor de Matemática e deu seu endereço através do seguinte enigma "Eu moro na Rua Bissetriz, na casa de menor número que quando dividido por 2, 3, 4, 5 ou 6 deixa resto 1. E, quando dividido por 11, deixa resto 0." Podemos afirmar que o número da casa é

(a) múltiplo de 13.

(b) quadrado perfeito.

(c) maior que 160.

(d) menor que 120.

(e) múltiplo de 17.

Solução. Os números naturais que deixam resto 1 ao serem divididos por 2, 3, 4, 5 ou 6 são os números naturais que deixam resto 1 ao serem divididos por $\text{mmc}\,(2{,}3{,}4{,}5{,}6)$. Como

$$\text{mmc}\,(2{,}3{,}4{,}5{,}6) = \text{mmc}\,(4{,}5{,}6) = 60,$$

os números naturais que deixam resto 1 ao serem divididos por 2, 3, 4, 5 ou 6 são $61, 121, 181, \ldots$.

Desse modo, uma vez que 61 e 121 deixam restos 5 e 0 ao serem divididos por 11, respectivamente, o menor número natural que ao ser dividido por 2, 3, 4, 5 ou 6 deixa resto 1 e ao ser dividido por 11 deixa resto 0 é 121.

Agora, como $121 = 11^2$, a alternativa correta é a letra **(b)**. $\square$

Exemplo 4 (CMF). O campo de futebol da Arena Castelão tem 106 metros de comprimento por 68 metros de largura. Ele foi coberto, em 2012, por placas de grama de formato retangular, com dimensões 200 centímetros de comprimento e 100 centímetros de largura. Este serviço ocorreu em 20 dias. Nos 5 primeiros dias, foram colocadas 25% das placas utilizadas para cobrir o gramado. Quantas placas de grama foram colocadas nos últimos 15 dias?

(a) 2577.

(b) 2652.

(c) 2703.

(d) 2754.

(e) 2763.

Solução. Veja que $200\,\text{cm} = 2\,\text{m}$ e $100\,\text{cm} = 1\,\text{m}$. Logo, a área de cada uma das placas de grama que foram utilizadas para cobrir o campo é $2 \times 1 = 2\,\text{m}^2$.

Por outro lado, o campo, que tem formato retangular e dimensões $68\,\text{m}$ e $68\,\text{m}$, possui área igual a $68 \times 106\text{m}^2$. Assim sendo, a quantidade de placas necessárias para cobrir completamente o gramado é

$$\frac{68 \times 106}{2} = 34 \times 106 = 3604.$$

Agora, como $25\% = \frac{1}{4}$, a quantidade de placas colocadas nos cinco primeiros dias é

$$\frac{3604}{4} = 901.$$

Portanto, $3604 - 901 = 2703$ placas foram colocadas nos últimos 15 dias de trabalho.

Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. □

Exemplo 5 (Banco OBMEP). Em um certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu 2% e o da maçã subiu 10%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs?

(a) 2%.

(b) 4%.

(c) 10%.

(d) 12%.

(e) 12,2%.

Solução. Denotando por P o preço (comum) de uma dúzia de ovos e de 10 maçãs, temos que os preços desses itens depois de uma semana são iguais a $(1 - 0{,}02)P = 0{,}98P$ e $(1 + 0{,}10)P = 1{,}1P$, respectivamente.

Assim, o preço de uma dúzia de ovos e 10 maçãs, que antes era $2P$, passou a ser $0{,}98P + 1{,}1P = (0{,}98 + 1{,}1)P = 2{,}08P$.

Agora, veja que

$$2{,}08P = 1{,}04 \times 2P = (1 + 0{,}04) \times 2P.$$

Portanto, o aumento sobre o preço de uma dúzia de ovos e 10 maçãs foi de 4%. Logo, a alternativa correta é a da letra **(b)**. □

Exemplo 6 (ENEM). Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

(*a*) 105 peças.

(*b*) 120 peças.

(*c*) 210 peças.

(*d*) 243 peças.

(*e*) 420 peças.

Solução. Como as tábuas devem ser cortadas em pedaços de um mesmo comprimento, sem deixar sobras, de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, o comprimento desses pedaços, em centímetros, deve ser o maior divisor comum a 540, 810 e 1080 menor que 200.

Uma vez que $\operatorname{mdc}(540{,}810{,}1080) = 270$, o comprimento dos pedaços é o maior divisor de 270 menor que 200, ou seja, $l = \frac{270}{2} = 135$.

Desse modo, a quantidade total de peças é igual a

$$\begin{aligned} 40 \cdot \frac{540}{135} + 30 \cdot \frac{810}{135} + 10 \cdot \frac{1080}{135} &= 40 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 10 \cdot 8 \\ &= 160 + 180 + 80 \\ &= 420. \end{aligned}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(e)**. □

Exemplo 7 (OBMEP). Geni é cliente de uma companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R$ 18,00;
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês;
- R$ 0,03 por minuto que exceder as 10 horas gratuitas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos e, em fevereiro, por 9 horas e 55 minutos. Qual foi a despesa de Geni com telefone nesses dois meses?

(a) R$ 45,51.

(b) R$ 131,10.

(c) R$ 455,10.

(d) R$ 13,11.

(e) R$ 4,55.

Solução. Em janeiro, como 10 horas são gratuitas e Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar, além da tarifa mensal fixa de R$ 18,00, apenas o custo das 5 horas e 17 minutos excedentes.

Agora, uma vez que o preço cobrado pela companhia telefônica é feito de acordo com a quantidade de minutos utilizados, vamos transformar em minutos o tempo que excedeu as 10 horas de gratuidade. Temos:

$$5\,\text{h}17\,\text{min} = 5 \times 60 + 17 = 317\,\text{min}.$$

Logo, o valor da conta telefônica de Geni em janeiro foi

$$18 + 317 \times 0{,}03 = 18 + 9{,}51 = 27{,}51 \text{ reais}.$$

Em fevereiro, Geni usou seu telefone por menos de 10 horas. Desse modo, ela pagou apenas a tarifa fixa mensal de R$ 18,00. Portanto, nesses dois meses, a despesa de Geni com telefone foi:

$$27{,}51 + 18{,}00 = 45{,}51 \text{ reais.}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. □

Exemplo 8 (OBMEP)**.** Uma loja de roupas reduziu em 10% o preço de uma camiseta, mas não conseguiu vendê-la. Na semana seguinte, reduziu em 20% o novo preço, e a camiseta foi vendida por R$ 54,00. Qual era o preço original da camiseta?

Solução. Denotando por P o preço original da camiseta, quando a loja reduziu esse preço em 10%, o novo preço passou a ser

$$(1 - 0{,}10)P = 0{,}9P.$$

Depois, com uma nova redução, agora de 20%, o preço da camiseta passou a ser

$$(1 - 0{,}20) \cdot 0{,}9P = 0{,}8 \cdot 0{,}9P = 0{,}72P.$$

Assim, $0{,}72P$ corresponde ao valor de 54 reais. Logo, o preço original P é igual a

$$54 \div 0{,}72 = 5400 \div 72 = 75 \text{ reais.}$$

□

Exemplo 9 (CMF)**.** Para o Desfile Cívico-Militar de 7 de setembro, o Colégio Militar de Fortaleza precisou deslocar o Batalhão Escolar para a Avenida Beira-Mar. Esse deslocamento foi realizado utilizando-se 18 ônibus com 50 lugares cada um. Em $\frac{1}{3}$ dos ônibus, $\frac{1}{10}$ dos lugares ficaram livres. Em $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus, dois lugares ficaram livres em cada um. Nos demais ônibus, ficou um lugar livre em cada um. Pode-se afirmar que o efetivo deslocado para a Avenida Beira-Mar poderia ter sido transportado em:

(a) 16 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.

(b) 16 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.

(c) 16 ônibus e sobrariam exatamente três lugares livres em um ônibus.

(d) 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.

(e) 17 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.

Solução. Calculemos o total de pessoas que foram à avenida Beira-mar para participar do desfile. Como $\frac{1}{3} \times 18 = \frac{18}{3} = 6$ e $\frac{1}{10} \times 50 = \frac{50}{10} = 5$, 6 ônibus foram à Beira-mar com 45 lugares ocupados.

Agora, veja que $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus correspondem a $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{12}{4} \cdot 3 = 3 \times 3 = 9$ ônibus, os quais foram à Beira-mar com 2 lugares vagos, ou seja, $50 - 2 = 48$ lugares ocupados.

Os 3 ônibus restantes foram à Beira-mar com 1 lugar livre cada, ou seja, $50 - 11 = 49$ lugares ocupados.

Assim, o total de pessoas que foram ao desfile é

$$\begin{aligned} & 6 \times 45 + 9 \times 48 + 3 \times 49 = \\ & = 6 \times (50 - 5) + 9 \times (50 - 2) + 3 \times (50 - 1) \\ & = 18 \times 50 - (6 \times 5 + 9 \times 2 + 3 \times 1) \\ & = 900 - 51 \\ & = 849. \end{aligned}$$

Mas, veja que

$$\begin{array}{r|l} 8\,4\,9 & 5\,0 \\ \cline{2-2} 3\,4\,9 & 1\,6 \\ 4\,9 & \end{array}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(d)**, ou seja, o efetivo do CMF poderia ser transportado em 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um dos ônibus. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Sugerimos aos professores que apresentem os exemplos com todos os detalhes e proponham exemplos adicionais aos alunos, sempre dando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

Antes de resolver cada problema, é recomendável fazer uma pequena revisão sobre os conteúdos abordados. No exemplo 8, é comum que os alunos pensem que as duas reduções sucessivas, uma de 10% e outra de 20%, correspondem a uma redução total de 30%, o que faria o preço após os descontos corresponder a 70% do preço original. Ressalte que o primeiro desconto foi aplicado ao preço original, mas o segundo foi aplicado ao preço com o desconto de 10%, logo, esses descontos não podem ser somados.

Ao apresentar o exemplo 9, explique por que a quantidade de ônibus necessária para transportar o efetivo do colégio à Beira-mar não é igual ao quociente da divisão de 849 por 50. Esse quociente é igual à quantidade de ônibus completamente cheios, mas é necessário um outro ônibus para transportar o restante das pessoas.