

**Material Teórico - Módulo: Geometria Espacial 3 - Volumes e Áreas de  
Cilindros, Cones e Esferas**

**Esfera - Parte 2**

**Terceiro Ano - Médio**

**Autor: Prof. Angelo Papa Neto**  
**Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto**



Nesta segunda parte da aula sobre esferas, vamos aprender a calcular a área de certas partes de uma superfície esférica, bem como o volume de certas partes de uma esfera, como calotas, zonas e setores esféricos e cunhas.

## 1 Partes notáveis da esfera

Nesta seção, apresentamos as definições de algumas partes da esfera e vemos como calcular a área da superfície dessas partes. Também, quando for o caso, aprenderemos a calcular o volume de uma dessas partes.

Como vimos na parte 1 desta aula, um círculo máximo sobre a superfície de uma esfera é a interseção da superfície dessa esfera com um plano que passa por seu centro. Uma vez escolhidos dois pontos  $N$  e  $S$  tais que o segmento  $NS$  é um diâmetro (isto é, dois pontos *antípodos*), o círculo máximo obtido como interseção da esfera com o plano perpendicular a  $NS$  e passando por seu ponto médio  $O$  é chamado *equador* da esfera (relativamente aos polos  $N$  e  $S$  – o círculo tracejado, na figura 1).

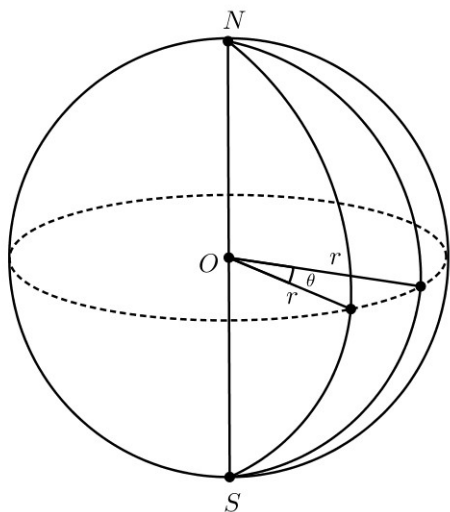


Figura 1: uma cunha esférica e seu fuso correspondente.

Chamamos de **cunha esférica** de **raio**  $r$  e **ângulo de abertura**  $\theta$  a parte de uma esfera de raio  $r$  varrida por um semicírculo de diâmetro  $NS$ , à medida que tal semicírculo gira de um ângulo  $\theta$  em torno de  $NS$  (veja, novamente, a figura 1).

Podemos ser mostrado que o volume de uma cunha esférica de raio  $r$  é proporcional a seu ângulo de abertura  $\theta$  (medido em radianos). Na linguagem de regras de três, dizemos que *o volume  $V_C$  da cunha está para seu ângulo de abertura assim como o volume da esfera está para  $2\pi$* . A partir daí, e lembrando que o volume de uma esfera de raio  $r$  é igual

a  $\frac{4\pi r^3}{3}$ , obtemos

$$\frac{V_C}{\theta} = \frac{4\pi r^3}{3 \cdot 2\pi}.$$

Resolvendo a igualdade acima para  $V_C$ , obtemos

$$V_C = \frac{2\theta r^3}{3}. \quad (1)$$

Chamamos de **fuso esférico** a parte da superfície esférica compreendida entre dois círculos máximos com mesmo diâmetro (veja a figura 1). O ângulo diedro  $\theta$  formado pelos planos que contêm esses semicírculos máximos é chamado de **ângulo de abertura do fuso**.

É importante perceber que uma cunha esférica é um *sólido*, ao passo que um fuso esférico é uma *porção da superfície de uma esfera*. Note, ainda, que uma cunha esférica é limitada por dois semicírculos com um mesmo diâmetro e por um fuso esférico; nesse caso, tanto a cunha quanto o fuso têm um mesmo ângulo de abertura.

Assim como ocorre com os volumes de cunhas esféricas, a área  $A_F$  de um fuso esférico de raio  $r$  é proporcional a seu ângulo de abertura  $\theta$ . Recordando que a área da superfície de uma esfera de raio  $r$  é  $4\pi r^2$  e vendo tal superfície como um fuso de ângulo de abertura  $2\pi$ , obtemos a regra de três:

$$\frac{A_F}{\theta} = \frac{4\pi r^2}{2\pi},$$

a partir da qual

$$A_F = 2\theta r^2. \quad (2)$$

A região de uma esfera compreendida entre dois planos paralelos é chamada de uma **zona esférica**. A distância  $h$  entre esses planos paralelos é chamada **altura da zona** (veja a figura 2, na qual destacamos os dois planos que delimitam a zona esférica).

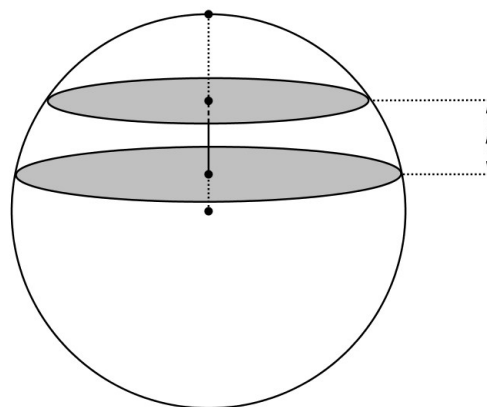


Figura 2: uma zona esférica de altura  $h$ .

A área da superfície de uma zona esférica pode ser calculada pelo mesmo método que usamos na Seção 4 da parte 1 desta aula para calcular a área de uma superfície esférica.

Para tanto, consideramos uma linha poligonal equilátera de  $n$  lados, com vértices situados sobre o arco de círculo cuja revolução gera a superfície da zona. Cada lado dessa poligonal, quando girado em torno do eixo de revolução (veja a figura 3), gera a superfície lateral de um tronco de cone. Por sua vez, a área lateral de cada um desses troncos de cone é, como sabemos,

$$A_i = 2\pi a_i h_i,$$

onde  $a_i$  é o apótema da poligonal e  $h_i$  é a altura do tronco de cone respectivo.

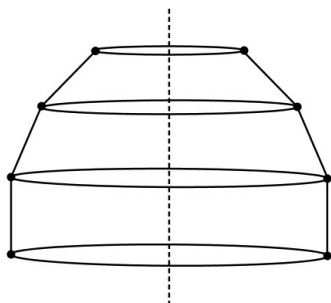


Figura 3: calculando a área de uma zona esférica.

O fato da poligonal ser equilátera garante que  $a_1 = \dots = a_n$  (pois, em um círculo, duas cordas de mesmo comprimento estão a uma mesma distância do centro). Denotando tal valor comum por  $a$ , concluímos que a área da superfície da zona esférica pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_Z &\cong 2\pi a_1 h_1 + \dots + 2\pi a_n h_n \\ &= 2\pi a h_1 + \dots + 2\pi a h_n \\ &= 2\pi a (h_1 + \dots + h_n) \\ &= 2\pi a h, \end{aligned}$$

onde  $h_1 + \dots + h_n = h$  é a altura da zona esférica.

Note que, na expressão  $A_Z \cong 2\pi a h$ , o valor de  $a$  ainda depende do número  $n$  de lados da poligonal equilátera. Além disso, à medida que  $n$  aumenta, dois fatos ocorrem:

- (i) O valor de  $a$  se aproxima mais e mais do raio  $r$  da esfera.
- (ii) A discrepância entre  $A_Z$  e  $2\pi a h$  fica cada vez menor.

Portanto, as aproximações  $A_Z \cong 2\pi a h \cong 2\pi r h$  fornecem o valor correto para  $A_Z$ :

$$A_Z = 2\pi r h. \quad (3)$$

Sugerimos que o leitor reveja o parágrafo 4 da parte 1 desta aula, onde os pormenores da demonstração esboçada acima estão detalhados para o caso em que  $h = 2r$ , ou seja, para o caso em que a zona esférica é uma esfera completa.

Consideremos, agora, um caso particular de zona esférica: dizemos que uma zona esférica é uma **calota esférica** quando um dos planos que a determinam é tangente à esfera (veja a figura 4).

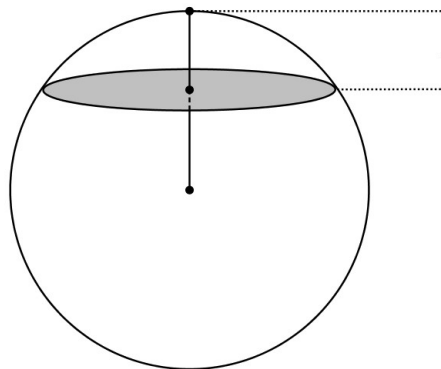


Figura 4: uma calota esférica de altura  $h$ .

Como toda calota é uma zona esférica, a área de sua superfície é determinada pela mesma fórmula (3).

A região do espaço gerada pela revolução de um setor circular  $AOB$  em torno de uma reta  $\ell$  que passa pelo centro  $O$  da esfera é chamada **setor esférico** (veja a figura 5). Note que a área da superfície de um setor esférico coincide com a área da superfície da zona esférica determinada pelos planos perpendiculares a  $\ell$  e passando pelos pontos  $A$  e  $B$ . A distância entre esses dois planos é chamada de **altura do setor esférico**.

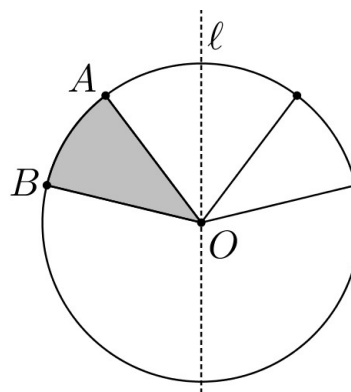


Figura 5: um setor esférico é gerado pela revolução de um setor circular.

## 2 Revisitando o volume da esfera

Nesta seção, iremos calcular o volume de um setor esférico. Em particular, nossas considerações fornecerão um método para o cálculo do volume de uma esfera diferente daquele visto na Seção 3 da parte 1 desta aula.

Vamos começar calculando o volume do sólido gerado pela revolução de um triângulo em torno de um eixo.

**Teorema 1.** *Sejam  $ABC$  um triângulo e  $\ell$  uma reta situada no plano de  $ABC$ , passando por  $A$  e não intersectando o interior de  $ABC$ . Então, o volume do sólido gerado pela revolução de  $ABC$  em torno de  $\ell$  é igual à terça parte do produto da área da superfície gerada pela revolução do lado  $BC$  em torno de  $\ell$ , multiplicada pela altura do triângulo relativa ao lado  $BC$ .*

**Prova.** Primeiramente, vamos supor que um dos lados do triângulo, digamos  $AB$ , esteja contido na reta  $\ell$ . Suporemos, ainda que  $ABC$  é obtusângulo em  $C$  (veja a figura 6); os demais casos podem ser tratados de modo inteiramente análogo.

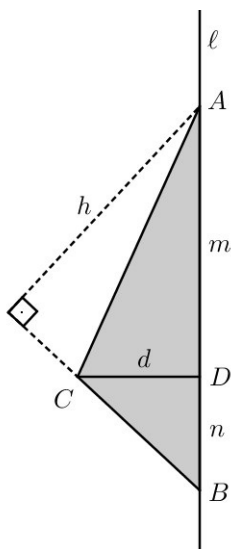


Figura 6: o triângulo  $ABC$  tem um lado sobre o eixo  $\ell$ .

Denotemos  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AD} = m$ ,  $\overline{DB} = n$  e  $\overline{CD} = d$ , onde  $D$  é o pé da altura baixada de  $C$  ao lado  $AB$ . Seja, ainda,  $h$  o comprimento da altura relativa ao lado  $BC$  do triângulo  $ABC$ .

O sólido gerado pela revolução de  $ABC$  em torno de  $\ell$  é formado por dois cones, gerados pelas revoluções dos triângulos  $ACD$  e  $BCD$  em torno de  $\ell$ . Uma vez que tais cones têm raio da base igual a  $d$  e alturas iguais a  $m$  e  $n$ , o volume  $V$  do sólido gerado pela revolução de  $ABC$  em torno de  $\ell$  é dado por

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi d^2 m + \frac{1}{3} \cdot \pi d^2 n = \frac{1}{3} \cdot \pi d^2 (m + n) = \frac{1}{3} \cdot \pi d^2 c.$$

Como os produtos  $cd$  e  $ah$  são ambos iguais ao dobro da área do triângulo  $ABC$ , temos  $dc = ha$ . Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi d \cdot cd = \frac{1}{3} \cdot \pi d \cdot ah = \frac{1}{3} \cdot \pi ad \cdot h. \quad (4)$$

Observe que a superfície gerada pela revolução do lado  $BC$  em torno de  $\ell$  é a superfície do cone gerado pela revolução do triângulo  $BCD$ . Então, sua área é  $\pi ad$ , e o resultado do Teorema é válido neste caso.

Suponha, agora, que o triângulo  $ABC$  tem em comum com a reta  $\ell$  apenas o ponto  $A$ , mas que a reta  $\overleftrightarrow{BC}$  não é paralela a  $\ell$  (veja a figura 7). Seja  $D$  o ponto de interseção entre  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\ell$  e suponha, sem perda de generalidade, que  $C$  está entre  $B$  e  $D$  (o caso em que  $B$  está entre  $C$  e  $D$  pode ser tratado de modo análogo).

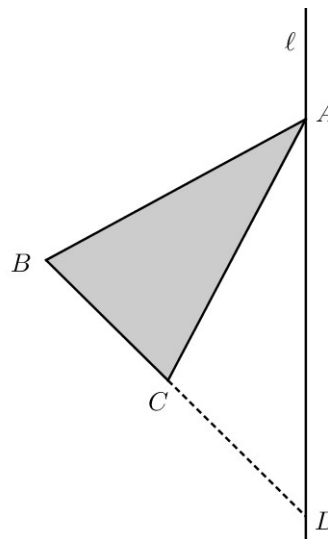


Figura 7: o triângulo  $ABC$  tem apenas o ponto  $A$  sobre o eixo  $\ell$ .

Se  $V$ ,  $V_1$  e  $V_2$  os volumes dos sólidos gerados pelas revoluções dos triângulos  $ABC$ ,  $ABD$  e  $ACD$  em torno de  $\ell$ , respectivamente, temos  $V = V_1 - V_2$ .

Como a altura  $h$  do triângulo  $ABC$  relativa ao lado  $BC$  é igual à altura do triângulo  $ABD$  relativa ao lado  $BD$  e também à altura do triângulo  $ACD$  relativa ao lado  $CD$ , temos, pelo primeiro caso,  $V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h$  e  $V_2 = \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot h$ , onde  $A_1$  e  $A_2$  são as áreas das superfícies geradas pela revolução dos segmentos  $BD$  e  $CD$ , respectivamente, em torno de  $\ell$ . Assim,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \cdot (A_1 - A_2)h,$$

e é fácil ver que  $A_1 - A_2$  é a área da superfície gerada pela revolução do segmento  $BC$  em torno de  $\ell$ .

Finalmente, resta analisar o caso em que o lado  $BC$  é paralelo à reta  $\ell$  (veja a figura 8). Nele, não podemos usar o argumento acima, pois não existirá ponto de interseção  $D$  entre  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\ell$ .

Sejam  $D$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  a  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $E$  e  $F$  os pés das perpendiculares baixadas de  $C$  e  $B$ , respectivamente, a  $\ell$ . Sendo  $r$  a distância entre  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $\ell$ , segue que  $\overline{AD} = \overline{FB} = \overline{EC} = r$ .

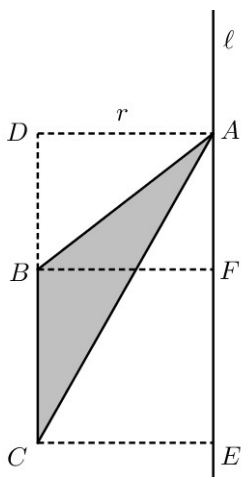


Figura 8: o triângulo  $ABC$  tem o lado  $BC$  paralelo ao eixo  $\ell$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $B$  está situado entre  $C$  e  $D$  (os casos em que  $C$  está situado entre  $B$  e  $D$ , ou  $D$  está situado entre  $B$  e  $C$ , podem ser tratados de modo análogo).

O sólido cujo volume  $V$  desejamos calcular (e que é gerado pela revolução do triângulo  $ABC$  em torno de  $\ell$ ) pode ser visto como o sólido gerado pela revolução do trapézio  $ABCE$  em torno de  $\ell$ , exceto pela porção correspondente ao sólido gerado pela revolução do triângulo  $ACE$  em torno de  $\ell$ .

Sendo  $V_1$  o volume do sólido gerado pela revolução do trapézio  $ABCE$  em torno de  $\ell$  e  $V_2$  o volume do sólido gerado pela revolução do triângulo  $ACE$  em torno de  $\ell$ , temos  $V = V_1 - V_2$ .

Para calcular  $V_1$ , vemos o sólido gerado pela revolução do trapézio  $ABCE$  em torno de  $\ell$  como a união do cilindro gerado pela revolução do retângulo  $BCEF$  em torno de  $\ell$  com o cone gerado pela revolução do triângulo  $ABF$  em torno de  $\ell$ . Portanto,

$$V_1 = \pi r^2 \cdot \overline{EF} + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{AF}. \quad (5)$$

Quanto a  $V_2$ , temos

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{AE} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{AF} + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{EF}, \quad (6)$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de que  $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{EF}$ .

Finalmente, calculando  $V = V_1 - V_2$  a partir de (5)–(6), obtemos prontamente

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 \cdot \overline{EF} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot \overline{EF} \cdot r \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi r \cdot \overline{EF} \cdot \overline{AD}. \end{aligned}$$

Na última expressão acima,  $2\pi r \cdot \overline{EF}$  é a área lateral do cilindro gerado pela revolução do retângulo  $BCEF$  em torno de  $\ell$ , que é justamente a área da superfície gerada pela revolução do segmento  $BC$  em torno de  $\ell$ ; por outro lado,  $\overline{AD}$  é o comprimento da altura de  $ABC$  relativa a  $BC$ . Isso demonstra o teorema também neste caso.  $\square$

Continuando na direção do cálculo do volume de um setor esférico, precisamos agora do seguinte conceito: uma **poligonal regular**  $P_1P_2 \dots P_n$  é um conjunto de segmentos  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$  que têm um mesmo comprimento e tais que os ângulos entre dois segmentos consecutivos  $P_{i-1}P_i$  e  $P_iP_{i+1}$  são todos congruentes (veja a figura 9). Os pontos  $P_1, \dots, P_n$  são chamados **vértices** da poligonal.

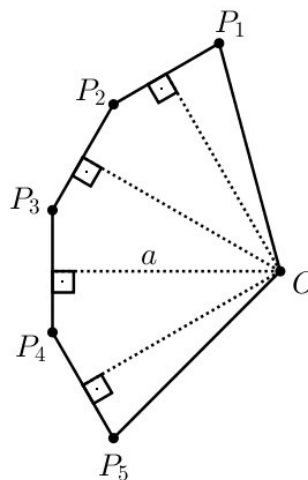


Figura 9: uma poligonal regular e seu setor poligonal correspondente.

Não é difícil mostrar que toda poligonal regular tem um **centro**, que é o único ponto do plano situado a uma mesma distância de seus vértices. Assim, sendo  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$  uma poligonal regular e  $O$  seu centro, temos que  $\overline{OP_i} = r$  é constante, para qualquer vértice  $P_i$  da poligonal. O polígono  $OP_1P_2 \dots P_n$  é chamado o **setor poligonal**, de centro  $O$ , associado à poligonal regular  $P_1P_2 \dots P_n$ .

Nas notações do parágrafo anterior, cada um dos triângulos  $OP_iP_{i+1}$  é isósceles de base  $P_iP_{i+1}$ ; portanto, a altura baixada de  $O$  ao lado  $P_iP_{i+1}$  incide no ponto médio desse lado. Sendo  $\overline{P_1P_2} = \dots = \overline{P_{n-1}P_n} = 2l$ , o Teorema de Pitágoras garante que o comprimento dessa altura mede

$$a = \sqrt{r^2 - l^2},$$

logo, independe do índice  $1 \leq i \leq n - 1$ . Tal comprimento  $a$  é o **apótema** da poligonal regular (e do setor poligonal).

Vamos, agora, calcular o volume do sólido gerado pela revolução de um setor poligonal em torno de uma reta que passa por seu centro.

**Teorema 2.** *Seja  $OP_1P_2 \dots P_n$  um setor poligonal de centro  $O$  e apótema  $a$ . Seja  $\ell$  uma reta situada no mesmo plano que o setor poligonal, passando por seu centro mas não intersectando seu interior. Se  $A$  é a área da superfície gerada pela revolução da poligonal em torno de  $\ell$ , então o volume  $V$  do sólido gerado pela revolução do setor poligonal em torno de  $\ell$  é*

$$V = \frac{1}{3} \cdot Aa.$$

**Prova.** O setor poligonal pode ser dividido em  $n$  triângulos  $OP_1P_2, OP_2P_3, \dots, OP_{n-1}P_n$  (a figura 10 mostra o caso  $n = 5$ ). Se  $V_i$  é o volume do sólido gerado pela revolução de  $OP_iP_{i+1}$  em torno de  $\ell$  e  $A_i$  é a área da superfície gerada pela revolução de  $P_iP_{i+1}$  em torno de  $\ell$ , é imediato que  $V = V_1 + \dots + V_n$  e  $A = A_1 + \dots + A_n$ .

Para cada índice  $1 \leq i \leq n - 1$ , podemos aplicar o Teorema 1 ao triângulo  $OP_iP_{i+1}$  para concluir que  $V_i = \frac{1}{3} \cdot aA_i$ . Assim,

$$V = V_1 + \dots + V_n = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + \dots + A_n)a = \frac{1}{3} \cdot Aa.$$

□

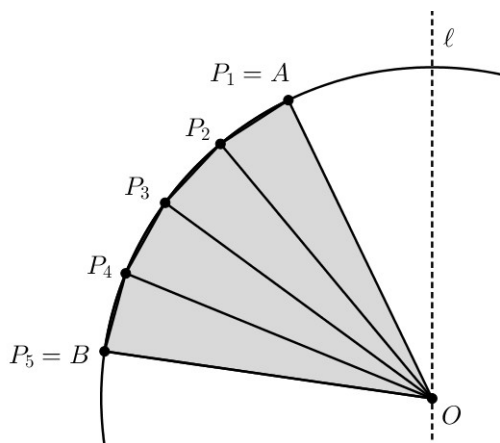


Figura 10: um setor circular e um setor poligonal inscrito.

Chegamos, finalmente, ao resultado desejado.

**Teorema 3.** *O volume  $V_S$  de um setor esférico de altura  $h$  em uma esfera de raio  $r$  é*

$$V_S = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h. \quad (7)$$

**Prova.** Seja  $S_n = OP_1P_2 \dots P_n$  um setor poligonal, com  $P_1 = A$  e  $P_n = B$  (para melhor acompanhamento, referimos novamente o leitor à figura 10, onde o caso  $n = 5$  é ilustrado).

À medida em que  $n$  aumenta, o volume  $V_n$  do sólido gerado pela revolução do setor  $S_n$  em torno de  $\ell$  fica cada vez mais próximo do volume  $V$  do setor esférico gerado pela revolução do setor circular  $AOB$  em torno de  $\ell$ . Indicamos esse fato dizendo que  $V_n$  **tende** a  $V$  quando  $n$  aumenta indefinidamente.

Pelo Teorema 2,  $V_n = \frac{1}{3} \cdot A_n a_n$ , onde  $A_n$  é a área da superfície gerada pela revolução da poligonal  $P_1 \dots P_n$  em torno de  $\ell$  e  $a_n$  é o apótema do setor poligonal  $S_n$ .

Quando  $n$  aumenta indefinidamente,  $a_n$  tende ao raio  $r$  da esfera e  $A_n$  tende à área  $A = 2\pi r h$  da superfície do setor esférico (calculada a partir de (3)). Consequentemente, o volume  $V_n$  tende a

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi r h \cdot r = \frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h.$$

Dessa forma, como o volume  $V_n$  se aproxima simultaneamente de  $V$  e de  $\frac{2}{3} \cdot \pi r^2 h$ , esses dois números são, necessariamente, iguais. □

Como caso particular do teorema anterior, consideremos, numa esfera de raio  $r$ , um setor esférico de altura  $h = 2r$ . Então, é imediato que tal setor corresponde a toda a esfera, de sorte que (7) fornece o seguinte

**Corolário 4.** *O volume  $V$  de uma esfera de raio  $r$  é dado por*

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3.$$

## Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Na Seção 2, obtemos um método para calcular o volume de um setor esférico e, consequentemente, para calcular o volume de uma esfera. Dessa forma, você pode abordar o problema do cálculo do volume de uma esfera sem a necessidade de usar o Princípio de Cavalieri.

As noções de poligonal regular e setor poligonal são definidas na Seção 2. Note que, embora tenhamos trabalhado antes com poligonais tanto na parte 1 desta aula quanto na

Seção 1, ao fazê-lo sempre consideramos poligonais inscritas em círculos. A definição de poligonal regular permite que trabalhem com poligonais sem a necessidade de considerar um círculo *a priori*. Se você julgar conveniente, pode introduzir a noção de poligonal regular bem antes, ainda na parte 1 desta aula.

### Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Geometria*, Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.
2. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.2. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
3. O. Dolce, J. N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol.10, sétima edição, São Paulo, 2013.
4. F.I.C., *Elementos de Geometria*, Revistos e adaptados por Eugênio de Barros Raja Gabaglia, Livraria Garnier, Paris, 1933.