

Material Teórico - Módulo Equações do Segundo Grau

Relações entre Coeficientes e Raízes - Parte II

Nono Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

07 de Outubro de 2025



**PORTAL DA
MATEMÁTICA**
OBMEP

Neste material, vamos abordar o problema de calcular a soma de potências (de um mesmo expoente) das raízes de uma equação de segundo grau; ao longo de todo o material, admitiremos que tais raízes são reais¹

Para simplificar a notação, nesta seção chamaremos de r e s as raízes da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. Para n natural, denotemos por S_n o valor de $r^n + s^n$. Por exemplo,

$$S_1 = r + s,$$

$$S_2 = r^2 + s^2,$$

$$S_3 = r^3 + s^3$$

e assim por diante.

Já vimos que $S_1 = -b/a$. Queremos, agora, encontrar uma maneira de expressar S_n em termos dos números a , b , c e n .

É claro que poderíamos encontrar r e s pela fórmula de Bhaskara e, em seguida, substituir os valores assim obtidos na expressão para S_n . Contudo, nosso objetivo é encontrar uma maneira de calcular S_n que seja mais simples do que essa.

Começemos comparando três diferentes abordagens para o cálculo de S_2 . Inicialmente, uma vez que

$$r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs, \quad (1)$$

temos

$$\begin{aligned} S_2 &= (r + s)^2 - 2rs \\ &= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} \\ &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}. \end{aligned}$$

¹Muito embora tudo o que faremos aqui em termos teóricos continue válido para o caso de as raízes serem *números complexos* não reais. A esse respeito, veja o capítulo 1 da referência [2].

Por outro lado, sendo r e s reais, também podemos calcular

$$\begin{aligned} S_2 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \\ &= \frac{b^2 - 2b\sqrt{\Delta} + \Delta}{4a^2} + \frac{b^2 + 2b\sqrt{\Delta} + \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 + \Delta}{2a^2} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}. \end{aligned}$$

Por fim, uma vez que r e s são raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, temos

$$\begin{cases} ar^2 + br + c = 0; \\ as^2 + bs + c = 0; \end{cases} \quad (2)$$

somando membro a membro essas duas igualdades, obtemos

$$a(r^2 + s^2) + b(r + s) + 2c = 0,$$

de sorte que

$$aS_2 + bS_1 + 2c = 0. \quad (3)$$

Temos, então, que $aS_2 = -bS_1 - 2c$, logo,

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{b}{a} \cdot S_1 - \frac{2c}{a} \\ &= -\frac{b}{a} \left(-\frac{b}{a} \right) - \frac{2c}{a} \\ &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}. \end{aligned}$$

Resolveremos o exemplo a seguir utilizando essas três abordagens, em parte para mostrar que, em casos numéricos específicos, em geral é melhor repetir os argumentos acima que decorar a fórmula obtida para S_2 em termos de a , b , c .

Exemplo 1. Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $2x^2 - 8x - 2220$.

Solução 1. Sendo r e s as raízes, temos

$$r + s = -\left(\frac{-8}{2}\right) = 4 \quad \text{e} \quad rs = \frac{-2220}{2} = -1110.$$

Utilizando (1), calculamos:

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= (r + s)^2 - 2rs \\ &= 4^2 - 2(-1110) \\ &= 16 + 2220 \\ &= 2236. \end{aligned}$$

□

Solução 2. Inicialmente, observe que as raízes r e s são as mesmas de $x^2 - 4x - 1110 = 0$, em cujo caso $\Delta = (-4)^2 - 4(-1110) = 4 \cdot 1114$. Portanto, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1114}$ e podemos supor, pela fórmula de Bhaskara, que

$$r = 2 + \sqrt{1114} \quad \text{e} \quad s = 2 - \sqrt{1114}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} r^2 + s^2 &= \left(2 + \sqrt{1114}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{1114}\right)^2 \\ &= (4 + 4\sqrt{1114} + 1114) + (4 - 4\sqrt{1114} + 1114) \\ &= 2 \cdot 1118 = 2236. \end{aligned}$$

□

Solução 3. Procedendo como em (2), observamos que

$$\begin{cases} 2r^2 - 8r - 2220 = 0 \\ 2s^2 - 8s - 2220 = 0 \end{cases}.$$

Somando membro a membro as duas relações acima, ficamos com

$$2S_2 - 8S_1 - 4440 = 0.$$

Como $S_1 = 4$, segue que

$$S_2 = 4S_1 + 2220 = 2236.$$

□

Mais adiante, veremos que a terceira abordagem utilizada para o cálculo de S_2 permite calcular S_n para valores pequenos de n de maneira mais fácil que as outras duas. Por ora, vejamos como utilizar estratégias semelhantes às das duas primeiras abordagens para calcular S_3 e S_4 .

Em ambos os casos, podemos utilizar produtos notáveis para obter

$$S_3 = r^3 + s^3 = (r + s)(r^2 + s^2 - rs)$$

e

$$\begin{aligned} S_4 &= r^4 + s^4 \\ &= (r^2 + s^2)^2 - 2r^2s^2 \\ &= (r^2 + s^2)^2 - 2(rs)^2. \end{aligned}$$

Uma vez que já sabemos calcular rs , $r + s$ e $r^2 + s^2$, as identidades acima dão os valores de S_3 e S_4 .

Por exemplo, para a equação $x^2 - 4x - 1110 = 0$ (essencialmente aquela do Exemplo 1), temos $rs = -1110$, $r + s = 4$ e $r^2 + s^2 = 2236$, de modo que

$$\begin{aligned} S_3 &= (r + s)(r^2 + s^2 - rs) \\ &= 4(2236 - (-1110)) \\ &= 13384 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S_4 &= (r^2 + s^2)^2 - 2(rs)^2 \\ &= 2236^2 - 2(-1110)^2. \end{aligned}$$

A segunda abordagem também é viável para calcular tanto para S_3 quanto S_4 em termos dos coeficientes, mas já deixa claro que, em geral (e mesmo em exemplos numéricos), é uma estratégia mais trabalhosa.

Para S_3 , utilizando os produtos notáveis

$$\begin{cases} (u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 \\ (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^3 + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^3 \\
 &= \frac{b^3 - 3b^2\sqrt{\Delta} + 3b\sqrt{\Delta}^2 - \sqrt{\Delta}^3}{8a^3} \\
 &\quad + \frac{b^3 + 3b^2\sqrt{\Delta} + 3b\sqrt{\Delta}^2 + \sqrt{\Delta}^3}{8a^3} \\
 &= \frac{b^3 + 3b\Delta}{4a^3} = \frac{b^3 - 3abc}{a^3}.
 \end{aligned}$$

O cálculo de S_4 pode ser feito, mas já é quase inviável:

$$\begin{aligned}
 S_4 &= \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^4 + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^4 \\
 &= \left(\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right)^2 + \left(\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right)^2 \\
 &= \left(\frac{b^2 - 2b\sqrt{\Delta} + \Delta}{4a^2} \right)^2 + \left(\frac{b^2 + 2b\sqrt{\Delta} + \Delta}{4a^2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{\Delta}}{2a^2} \right)^2 + \left(\frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{\Delta}}{2a^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4a^4} \left((b^2 - 2ac - b\sqrt{\Delta})^2 + (b^2 - 2ac + b\sqrt{\Delta})^2 \right) \\
 &= \frac{1}{4a^4} \left(((b^2 - 2ac)^2 - 2(b^2 - 2ac)b\sqrt{\Delta} + b^2\Delta) \right. \\
 &\quad \left. + ((b^2 - 2ac)^2 + 2(b^2 - 2ac)b\sqrt{\Delta} + b^2\Delta) \right) \\
 &= \frac{1}{2a^4} ((b^2 - 2ac)^2 + b^2\Delta).
 \end{aligned}$$

Ufa!!

O que podemos, então, fazer em relação ao problema geral do cálculo de S_n ? Por exemplo, existe uma maneira

simples de calcular S_n até $n = 7$, digamos, em um exemplo numérico específico? A resposta está contida na generalização da terceira abordagem que discutimos para o cálculo de S_2 .

De forma geral, para $n \geq 3$, multiplicando as igualdades em (2) por r^{n-2} e s^{n-2} , respectivamente, obtemos:

$$\begin{cases} ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = 0 \\ as^n + bs^{n-1} + cs^{n-2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Em seguida, somando as duas igualdades acima membro a membro, ficamos com

$$a(r^n + s^n) + b(r^{n-1} + s^{n-1}) + c(r^{n-2} + s^{n-2}) = 0$$

ou, o que é o mesmo, com

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0, \quad (5)$$

para todo $n \geq 3$.

Observe que, se $c \neq 0$, então 0 não é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Nesse caso, temos $S_0 = r^0 + s^0 = 2$, de forma que a relação (3) pode ser escrita como

$$aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0;$$

assim, nesse caso, (5) também vale para $n = 2$.

A seguir, veremos alguns exemplos de aplicação dessas ideias. Antes de passar a eles, vale observar que (5) é uma relação fácil de recordar. Basta notar que os coeficientes são os mesmos da equação do segundo grau, apenas trocando x^2 , x , 1 por S_n , S_{n-1} , S_{n-2} , respectivamente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \mapsto \quad aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

Exemplo 2. *Quanto vale a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 + x - 3 = 0$?*

Solução. Aqui, $a = b = 1$ e $c = -3$, de forma que (5) torna-se $S_n + S_{n-1} - 3S_{n-2} = 0$ ou, ainda,

$$S_n = -S_{n-1} + 3S_{n-2},$$

para $n \geq 2$. Como $S_0 = 2$ e $S_1 = -1$, temos

$$\begin{aligned}S_2 &= -S_1 + 3S_0 = -(-1) + 3 \cdot 2 = 7; \\S_3 &= -S_2 + 3S_1 = -7 + 3 \cdot (-1) = -10.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3. Sendo m e n as raízes da equação de segundo grau $x^2 - 10x + 3 = 0$, calcule $\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4}$.

Solução 1. Veja que

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = \frac{m^4 + n^4}{n^4 m^4} = \frac{m^4 + n^4}{(mn)^4}.$$

Como m e n são raízes de $x^2 - 10x + 3 = 0$, temos que $mn = 3/1 = 3$. Portanto,

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = \frac{m^4 + n^4}{3^4} = \frac{1}{81}(m^4 + n^4).$$

Procedendo como nos exercícios anteriores, temos, para $n \geq 2$ inteiro, $S_n - 10S_{n-1} + 3S_{n-2} = 0$ ou, ainda,

$$S_n = 10S_{n-1} - 3S_{n-2}.$$

Como $S_0 = 2$ e $S_1 = 10$, segue que

$$\begin{aligned}S_2 &= 10S_1 - 3S_0 = 10 \cdot 10 - 3 \cdot 2 = 94; \\S_3 &= 10S_2 - 3S_1 = 10 \cdot 94 - 3 \cdot 10 = 910; \\S_4 &= 10S_3 - 3S_2 = 10 \cdot 910 - 3 \cdot 94 = 8818.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = \frac{8818}{81}.$$

□

Solução 2. Alternativamente, calculamos

$$\begin{aligned}m^2 + n^2 &= (m + n)^2 - 2mn \\&= 10^2 - 2 \cdot 3 = 94\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}m^4 + n^4 &= (m^2 + n^2)^2 - 2m^2n^2 \\&= 94^2 - 2 \cdot 3^2 \\&= 8818,\end{aligned}$$

de forma que

$$\frac{1}{n^4} + \frac{1}{m^4} = \frac{1}{81}(m^4 + n^4) = \frac{8818}{81}.$$

□

Exemplo 4. *Sejam r e s as raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Encontre o valor de $r^5 + s^5$.*

Solução. Temos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$. Como $c \neq 0$, a relação (5) torna-se $S_n - S_{n-1} - S_{n-2} = 0$, ou seja,

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

Assim, começando com $S_0 = 2$ e $S_1 = -\left(\frac{-1}{1}\right) = 1$, calculamos sucessivamente:

$$S_2 = S_1 + S_0 = 1 + 2 = 3;$$

$$S_3 = S_2 + S_1 = 3 + 1 = 4;$$

$$S_4 = S_3 + S_2 = 3 + 3 = 7;$$

$$S_5 = S_4 + S_3 = 7 + 4 = 11.$$

□

Ainda em relação ao exemplo anterior, a título de comparação com as outras abordagens vistas anteriormente, a fórmula de Bhaskara dá

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad s = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

ou vice-versa, de modo que

$$r^5 + s^5 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^5.$$

Então, para calcular $r^5 + s^5$ diretamente a partir da igualdade acima, teríamos de expandir os produtos em

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^5.$$

Esses cálculos poderiam ser simplificados (ou, pelo menos, automatizados) por meio do uso de uma fórmula bem conhecida, denominada a *fórmula de expansão binomial* ou, ainda, a fórmula do binômio de Newton: para $u, v \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se²

$$\begin{aligned}(u + v)^n = & \binom{n}{0} u^n v^0 + \binom{n}{1} u^{n-1} v^1 + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 \\ & + \dots + \binom{n}{n-1} u^1 v^{n-1} + \binom{n}{n} u^0 v^n,\end{aligned}\tag{6}$$

em que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e, para $1 \leq k \leq n - 1$, o número $\binom{n}{k}$ é (o natural) definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Essa fórmula engloba, é claro, os casos $n = 2$ e $n = 3$ (correspondentes aos *produtos notáveis* $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$ e $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$) e dá, para $n = 4$ e $n = 5$ (verifique!),

$$\begin{cases} (u + v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 \\ (u + v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5 \end{cases}.$$

Para propósitos como o do exemplo anterior, o uso de (5) é bem mais direto que o emprego da última fórmula acima. Contudo, veremos no exemplo a seguir que, para propósitos *teóricos*, as utilizações de (5) ou (6) rivalizam em dificuldade.

²Uma demonstração pode ser encontrada no módulo *Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal*, do 2º ano do Ensino Médio, ou no Capítulo 6 da referência [1].

Exemplo 5. Mostre que $(3 + \sqrt{2})^{100} + (3 - \sqrt{2})^{100}$ é um natural.

Prova 1. Inicialmente observamos que $(3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6$ e $(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3^2 - \sqrt{2}^2 = 7$. Portanto, $3 + \sqrt{2}$ e $3 - \sqrt{2}$ são as raízes da equação de segundo grau

$$x^2 - 6x + 7 = 0.$$

Veja que $3 - \sqrt{2} > 0$, de modo que, pondo $S_n = (3 + \sqrt{2})^n + (3 - \sqrt{2})^n$, temos $S_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, basta mostrar que $S_{100} \in \mathbb{Z}$. Para tanto, segue de (5) que

$$S_n = 6S_{n-1} - 7S_{n-2}, \quad \forall n \geq 2,$$

com $S_0 = 2$ e $S_1 = 6$, ambos inteiros. Então,

$$S_2 = 6S_1 - 7S_0 \in \mathbb{Z};$$

$$S_3 = 6S_2 - 7S_1 \in \mathbb{Z};$$

$$S_4 = 6S_3 - 7S_2 \in \mathbb{Z};$$

.....

$$S_{99} = 6S_{98} - 7S_{97} \in \mathbb{Z};$$

$$S_{100} = 6S_{99} - 7S_{98} \in \mathbb{Z}.$$

□

Prova 2. Utilizando (6) com $n = 100$, $u = 3$ e $v = \sqrt{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{2})^{100} &= \binom{100}{0} 3^{100} + \binom{100}{1} 3^{99} \sqrt{2} + \binom{100}{2} 3^{98} \sqrt{2}^2 \\ &\quad + \dots + \binom{100}{99} 3 \sqrt{2}^{99} + \binom{100}{100} \sqrt{2}^{100}. \end{aligned}$$

Com $u = 3$ e $v = -\sqrt{2}$, obtemos

$$\begin{aligned} (3 - \sqrt{2})^{100} &= \binom{100}{0} 3^{100} - \binom{100}{1} 3^{99} \sqrt{2} + \binom{100}{2} 3^{98} \sqrt{2}^2 \\ &\quad + \dots - \binom{100}{99} 3 \sqrt{2}^{99} + \binom{100}{100} \sqrt{2}^{100}. \end{aligned}$$

Então, somando membro a membro as duas igualdades acima, segue que

$$S_{100} = 2 \left(\binom{100}{0} 3^{100} + \binom{100}{2} 3^{98} \sqrt{2}^2 + \dots + \binom{100}{100} \sqrt{2}^{100} \right),$$

uma soma de naturais, logo, um natural. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que o conteúdo deste material seja tratado em três encontros de 50 minutos.

Observamos que a argumentação que levou a (5) pode ser generalizada, da seguinte forma: se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ forem as raízes da *equação polinomial*

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

na qual $a_0 \neq 0$ e $a_k \neq 0$, e

$$S_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_k^n,$$

então, para $n \geq k$, tem-se

$$a_k S_n + a_{k-1} S_{n-1} + \dots + a_1 S_{n-k+1} + a_0 S_{n-k} = 0.$$

Nesse caso, apesar de conhecermos $S_0 = k$ e $S_1 = -a_{k-1}/a_k$ e podermos calcular S_2 sem muita dificuldade, é mais complicado calcular $S_3, \dots, S_{k-1}$. Contudo, isso pode ser feito com o auxílio das *identidades de Jacobi*. (Para os detalhes, veja a referência [2], Capítulo 4.)

As referências [1] e [2] discutem vários problemas correlatos aos exemplos aqui reunidos, muitos dos quais oriundos de olimpíadas de Matemática ao redor do globo.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais*, terceira edição. SBM, Rio de Janeiro, 2024.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 6: Polinômios*, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2016.