Material Teórico - Módulo de PORCENTAGEM E JUROS

Introdução à Porcentagem

Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Autor: Prof. Francisco Bruno Holanda
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Introdução

Neste módulo iremos abordar um assunto de extrema importância no mundo prático. Iremos aprender como a Matemática pode nos ajudar a tomar melhores decisões em uma área que se torna cada vez mais presente na vida de quem vive em sociedades modernas: finanças pessoais.

Em um passeio rápido pela zona comercial de qualquer cidade, podemos encontrar frases como:

- Toda a loja com 10% de desconto.
- Compre em três vezes sem juros.
- Desconto de 20% à vista.
- Solicite seu empréstimo, juros de 3% ao mês.

Veja que, antes de mais nada, todas as situações acima envolvem o conceito de porcentagem. Dessa forma, reservamos esse material a uma breve revisão sobre esse tema.

2 Porcentagem

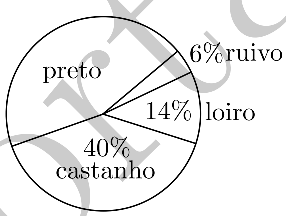
Lembre-se de que as porcentagens podem ser entendidas como frações **com denominador igual a 100**. Além disso, o símbolo de **porcentagem** (%), pode ser pensado como representando a fração $\frac{1}{100}$. Assim, por exemplo,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50 \cdot \frac{1}{100} = 50\%.$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25 \cdot \frac{1}{100} = 25\%.$$

Temos também a fração $\frac{100}{100} = 1 = 100\%$. Portanto, o número 1 representa uma determinada **totalidade**.

Exercício 1. *Uma pesquisa levantou as cores de cabelo de* 1200 *pessoas. Os resultados obtidos são mostrados no diagrama a seguir:*



Pergunta-se: quantas pessoas entrevistadas possuem cabelo preto?

Solução. Para resolver este exercício, observe que 100% representa a fração $\frac{100}{100} = 1$, na qual o número 1 representa a *totalidade de pessoas entrevistadas*, i.e, 1200 pessoas. Por outro lado, veja que

$$6\% + 14\% + 40\% = \frac{6}{100} + \frac{14}{100} + \frac{40}{100} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Portanto, o porcentual de pessoas com cabelo preto é

$$100\% - 60\% = 1 - \frac{60}{100} = \frac{40}{100} = 40\%,$$

ou seja, 40% de uma totalidade de 1200 pessoas. Consequentemente,

$$\frac{40}{100} \cdot 1200 = 480$$

das pessoas entrevistadas possuem cabelo preto. $\square$

Um diagrama circular como o do exercício anterior, no qual várias porcentagens estão representadas por *setores circulares* de *aberturas* proporcionais às mesmas, é conhecido como um **gráfico de pizza** ou, ainda, um **gráfico de setores**. Uma grande vantagem de gráficos de pizza reside no fato de que eles transmitem rapidamente uma ideia das porcentagens envolvidas.

Lembre-se de que a porcentagem é uma medida *relativa* e não *absoluta*. Portanto, ela deve ser sempre interpretada como parte de uma totalidade. Por outro lado, o aluno deve manter-se ainda mais atento em problemas nos quais porcentagens diferentes se referem a totalidades diferentes.

Exercício 2. *A massa de gordura de uma certa pessoa corresponde a* 20% *de sua massa total. Essa pessoa, pesando* 100 *quilos, fez um um regime e perdeu* 40% *de sua gordura, mantendo os demais índices. Quantos quilogramas ela pesava ao final do regime?*

Solução. Como 20% da massa total dessa pessoa corresponde à massa de gordura, ela tinha

$$20\% \cdot 100 = \frac{20}{100} \cdot 100 = 20$$

quilos de gordura no início do regime. Ela perdeu 40% dessa gordura, ou seja, perdeu

$$40\% \cdot 20 = \frac{40}{100} \cdot 20 = 8$$

quilos de gordura. Como manteve os demais índices, ao final do regime ela passou a pesar $100 - 8 = 92$ quilos. $\square$

Uma das aplicações cootidianas mais importantes do conceito de porcentagem é relacionada à compreensão e/ou ao cálculo dos *juros* presentes em alguma transação comercial ou financeira. Mas, *o que são juros? Por que eles existem?* Antes de respondermos estas e outras perguntas de maneira um pouco mais formal (o que faremos na próxima aula), tentaremos endenter intuitivamente o conceito de juros através de uma situação cotidiana.

Imagine que Josimar tem um violão que já não usa há muito tempo. Por conta disso, ele resolve vendê-lo para arrecadar dinheiro para comprar algo que está desejando muito no momento: uma coleção de livros do escritor Machado de Assis. Esta coleção está custando $R\$100,00$ e Josimar decide por seu violão a venda pelo mesmo preço. Ele também fica sabendo que seu amigo Paulo está disposto a comprar seu violão, pois fará uma apresentação em um show de talentos em breve. Entretanto, Paulo só terá o dinheiro para comprar o violão no próximo mês.

Para resolver este impasse, Josimar permite que seu amigo leve seu violão, mas que só o pague no próximo mês, *desde que Paulo pague a ele juros de* 10%. Isso significa que Paulo deverá pagar a Josimar 10% a mais do que o preço pedido por ele, isto é, Paulo deverá pagar

$$(100\% + 10\%) \cdot 100 = 110\% \cdot 100 = \frac{110}{100} \cdot 100 = 110$$

reais.

Nessa situação, podemos interpretar os juros como um **custo de oportunidade**, ou seja, enquanto Paulo poderá desfrutar do violão imediatamente, Josimar só poderá comprar e ler as obras de Machado de Assis no próximo mês. Assim, os dez reais de juros são uma forma *compensar* Josimar pela espera e por ter vendido *fiado* o violão a Paulo.

Também existem outras formas de justificar a existência dos juros na Economia. Voltaremos a tratar de juros, e de forma bem mais detalhada, na próxima aula deste módulo.

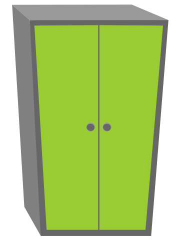
3 Exercícios

Nesta seção, resolvemos algums exercícios envolvendo o conceito de porcentagem.

Exercício 3. *Um guarda-roupas foi comprado a prazo, pagando-se $R\$2.204,00$. Sabe-se que o cliente obteve um desconto de 5% sobre o preço de etiqueta e parcelou em três vezes. Se a compra tivesse sido à vista, o guarda-roupa teria saído por $R\$1.972,00$. Neste caso, qual teria sido o desconto obtido em relação ao preço de etiqueta?*

Solução. Como o guarda-roupas foi comprado com 5% de desconto, isto equivale a dizer que ele foi comprado por 95% (0,95 na forma decimal) do seu preço.

Como 95% do preço sem desconto resultou em 2204 reais, concluímos que o preço sem desconto pode ser obtido



dividindo-se 2204 por 0,95. Então, o preço do produto sem qualquer desconto é

$$\frac{2204}{0,95} = \frac{2204 \cdot 100}{95} = 2320$$

reais.

Como o preço à vista seria de $R\$1.972,00$ e o preço sem nenhum desconto é $R\$2.320,00$, o desconto obtido com a compra à vista seria de $2320 - 1972 = 348$ reais.

Para calcular o desconto na compra à vista como uma porcentagem do preço sem desconto, precisamos calcular quantos por cento de 2320 reais resultam em 348 reais. Isso é o mesmo que calcular a fração de 2320 que 348 representa, escrita com denominador 100. Como

$$\frac{348}{2320} = 0,15 = \frac{15}{100},$$

concluímos que o desconto percentual que teria sido obtido na compra à vista seria de 15%. □

Exercício 4. *Uma sorveteria lançou a seguinte promoção durante o inverno: na compra de quatro picolés, o quinto é grátis. Em termos porcentuais, qual é o desconto sobre o preço de cada picolé que esta promoção está oferendo a seus clientes?*

Solução. Digamos que o preço de cada picolé seja x. Neste caso, o custo para comprar cinco picolés sem a promoção é de $5x$. Mas, como um picolé saiu de graça, o total pago pelos cinco picolés na promoção foi x. Isso é o mesmo que cada um dos cinco picolés ser comprado por

$$\frac{4x}{5} = \frac{4}{5} \cdot x = \frac{80}{100} \cdot x = 80\% x.$$

Assim, podemos afirmar que o desconto sobre o preço de cada picolé é de $100\% - 80\% = 20\%$. □

Exercício 5. *Em agosto de 2006, Josué gastava 20% de seu salário no pagamento do aluguel de sua casa. A partir de setembro de 2006, ele teve um aumento de 8% em seu salário e o aluguel de sua casa foi reajustado em 35%. Nessas condições, para o pagamento do aluguel após os reajustes, qual porcentagem do salário Josué deverá desembolsar mensalmente?*

Solução. Digamos que o salário de Josué seja x. Neste caso, o gasto inicial com o aluguel é de $\frac{20}{100}x = \frac{x}{5}$.

Após o aumento de seu salário, Josué passou a receber

$$x + 8\%x = x + \frac{8}{100}x = 1,08x.$$

Por outro lado, após o aumento, o aluguel passou a custar 35% a mais do que antes, isto é, passou a custar

$$\frac{x}{5} + 35\%\frac{x}{5} = \left(1 + \frac{35}{100}\right)\frac{x}{5} = \frac{135}{100} \cdot \frac{x}{5} = 0,27x.$$

Precisamos calcular que fração percentual do novo salário de Josué representa esse novo valor do aluguel. Para isso, começamos observando que ele a fração do novo salário destinada ao aluguel é de

$$\frac{0,27x}{1,08x} = 0,25.$$

Portanto, Josué deverá desembolsar mensalmente $0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$ de seu salário para pagar o aluguel de sua casa. $\square$

Exercício 6. *Marcos compra peças de roupas para revender com 20% de lucro. Certo dia, resolveu vender algumas de suas peças com 10% de desconto sobre o preço normal de venda. Neste dia, qual será seu percentual de lucro?*

Solução. Digamos que Marcos compre suas peças de roupa por x reais cada. Para obter 20% de lucro, ele deve vendê-las por

$$x + \frac{20}{100}x = 1,2x.$$

Por outro lado, se ele resolve fazer uma promoção e vender as peças com 10% de desconto, o preço de cada peça deve ser

$$1,2x - \frac{10}{100} \cdot 1,2x = \left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdot 1,2x = 0,9 \cdot 1,2x = 1,08x.$$

Lembrando que Marcos comprou cada peça por x reais, concluímos que ele está lucrando $1,08x - x = 0,08x$. Esse total representa

$$\frac{0,08x}{x} = 0,08 = \frac{8}{100} = 8\%$$

em relação ao preço de compra, e esse será seu lucro percentual. $\square$

Exercício 7 (OBM - adaptado). *Películas protetoras para vidros são utilizadas em janelas de edifícios e vidros de veículos para reduzir a radiação solar. Cada película é classificada de acordo com seu grau de transparência, ou seja, de acordo com o percentual da radiação solar que ela deixa passar. Se colocarmos uma película de 70% de transparência sobre um vidro com 90% de transparência, calcule a redução de radiação solar para quem se encontra no interior do ambiente.*

Solução. Argumentando de maneira análoga à solução do exemplo anterior, concluímos que o vidro deixa passar um total de radiação solar de

$$\frac{70}{100} \cdot \frac{90}{100} = \frac{63}{100} = 63\%$$

do valor percebido ao ar livre. Portanto, quem se encontra no interior do ambiente recebe a radiação solar com uma redução de $100\% - 63\% = 37\%$. $\square$

Exercício 8 (FGV). *João divide suas economias e as aplica em dois fundos de investimento: A e B. No primeiro mês, o fundo A rendeu 50% e o fundo B rendeu 30%. No segundo mês, ambos renderam 20%. Se a rentabilidade de que João obteve no bimestre foi de 63,2%, que porcentagem de suas economias foi aplicada no fundo B?*

Solução. Digamos que João tem um total de 100 reais para investir. Suponha que x reais são investidos no fundo A e $100 - x$ no fundo B.

Ao fim do primeiro mês, o fundo A estará com

$$x + 50\%x = 1,5x$$

e o fundo B estará com

$$(100 - x) + 30\%(100 - x) = 1,3 \cdot (100 - x).$$

Portanto, ao final do primeiro mês João terá

$$1,5x + 130 - 1,3x = 130 + 0,2x.$$

No segundo mês, ambos os fundos de investimento renderam 20%. Assim, ao final do bimestre, João terá

$$\begin{aligned}(130 + 0,2x) + 20\%(130 + 0,2x) &= 1,2(130 + 0,2x)\\ &= 156 + 0,24x\end{aligned}$$

reais.

Mas, como a rentabilidade obtida por João foi de $63,2\%$ sobre o valor inicial de 100 reais, concluímos que João terminou o bimestre com

$$100 + 63,2\% \cdot 100 = 100 + 63,2 = 163,2$$

reais. Então,

$$156 + 0,24x = 163,2$$

de forma que $0,24x = 7,2$ e, assim,

$$x = \frac{7,2}{0,24} = 30.$$

Portanto, de cada 100 reais investidos, João investiu 30 no fundo A. Logo, o percentual investido por ele nesse primeiro fundo de investimentos foi de 30%. □

Exercício 9. *Carla investiu nas ações da empresa OMGX parte do que tinha guardado, deixando o restante em sua conta corrente. No primeiro mês, as ações da empresa perderam 40% do seu valor. Qual deve ser o aumento percentual no preço das ações, no segundo mês, para que Carla volte a ter a mesma quantidade de dinheiro que tinha inicialmente?*

Solução. Seja x o preço inicial de cada ação. Ao perder 40% de seu valor no primeiro mês, a ação passou a custar

$$x - 40\%x = (1 - 0,4)x = 0,6x.$$

Se, no segundo mês, seu preço sofrer um aumento de $r\%$, ele passará a ser de

$$0,6x + r\% \cdot 0,6x = \left(1 + \frac{r}{100}\right)0,6x.$$

Assim, para que Carla volte a ter a mesma quantidade de dinheiro, concluímos que deve ser

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot 0,6x = x.$$

Isso é o mesmo que

$$\frac{r}{100} = \frac{1}{0,6} - 1 = \frac{2}{3} \cong 0,666.$$

Portanto,

$$r \cong 100 \cdot 0,666 = 66,6,$$

e concluímos que as ações devem sofrer um aumento de aproximadamente $66,6\%$ no segundo mês. □

Os exemplos acima deixam claro que descontos ou acréscimos percentuais sobre certo valor devem ser calculados como resultados de operações de multiplicação do valor pela fração (com denominador 100) que representa o desconto ou acréscimo.

Por outro lado, é comum pensarmos que descontos ou acréscimos percentuais sucessivos devam ser somados, a fim de que o valor final possa ser calculado de uma só vez. Entretanto, esse raciocínio não está correto, conforme atestam as soluções dos exemplos 7 e 8. A razão é que, em situações de descontos ou acréscimos sucessivos, cada percentagem incide sobre um valor diferente. Portanto, elas representam *medidas relativas* que, aplicadas sucessivamente, correspondem a frações de totalidades distintas.

4 Sugestões ao professor

Sugerimos que o professor separe dois encontros de 50 minutos cadas para abordar os assuntos deste material. Na primeira aula, relembre o conceito de porcentagem e resolva alguns exercícios; verifique também a habilidade dos alunos em resolver expressões algébricas que envolvam multiplicação e adição de frações. No segundo encontro, introduza o conceito de juros (simples) e concentre-se nos exercícios que envolvem aumentos e descontos sucessivos. É importante que os alunos fixem bem a ideia de que as porcentagens envolvidas nesses tipos de problemas não devem ser somadas, e sim multiplicadas.

Ao final da aula, solicite aos alunos que comentem situações reais nas quais eles se depararam com aplicações dos assuntos abordados nesta aula. Se possível, elabore um ou mais exercícios que simulem as situações apresentadas pelos alunos. Uma estratégia interessante também é dividir os alunos em equipes e pedir para que eles mesmos elabores exercícios envolvendo as situações cotidianas trazidas à sala.

Créditos pelas figuras:
www.freepik.com