Material Teórico - Módulo Aritmética dos Restos

Divisibilidade e Resto - Parte 2

Tópicos Adicionais

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de janeiro de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Dando sequência ao que foi feito no material anterior, continuaremos apresentando aplicações do Algoritmo da Divisão ao longo deste material.

Exemplo 1. *Encontre o resto da divisão de* $2025 + 2026$ *por* 7.

Solução. Uma ideia imediata para encontrar esse resto consiste em efetuar a adição $2025 + 2026$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 2\,0\,2\,5 \\ +\;2\,0\,2\,6 \\ \hline 4\,0\,5\,1 \end{array}$$

e, em seguida, efetuar a divisão $4051 \div 7$. Assim, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 4\,0\,5\,1 & 7 \\ \cline{2-2} 5\,5 & 5\,7\,8 \\ 6\,1 & \\ 5 & \end{array}$$

Logo, o resto da divisão de $2025 + 2026$ por 7 é igual a 5.

Por outro lado, dividindo 2025 e 2026 por 7, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,5 & 7 \\ \cline{2-2} 6\,2 & 2\,8\,9 \\ 6\,5 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,0\,2\,6 & 7 \\ \cline{2-2} 6\,2 & 2\,8\,9 \\ 6\,6 & \\ 3 & \end{array}$$

Agora, observe que, quando somamos os restos das divisões de 2025 e 2026 por 7, obtemos $2 + 3 = 5$, que é o resto da divisão de $2025 + 2026$ por 7. Isso não é coincidência; de fato, temos

$$2025 = 7 \cdot 289 + 2 \quad \text{e} \quad 2026 = 7 \cdot 289 + 3,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} 2025 + 2026 &= (7 \cdot 289 + 2) + (7 \cdot 289 + 3) \\ &= (7 \cdot 289 + 7 \cdot 289) + (2 + 3) \\ &= 7 \cdot (289 + 289) + 5 \\ &= 7 \cdot 578 + 5. \end{aligned}$$

Assim, uma vez que quociente e resto na divisão de números inteiros são únicos e $5 < 7$, temos que 5 é o resto da divisão de $2025 + 2026$ por 7. $\square$

Mais geralmente, temos a seguinte

Proposição 2. *Sejam m, n, a e d números inteiros positivos tais que $d \mid a$. Se r_1 e r_2 são os restos das divisões de m e n por a, respectivamente, então o resto da divisão de $m+n$ por d é o mesmo resto da divisão de r_1+r_2 por d. Em particular, o resto da divisão de $m+n$ por a é o mesmo resto da divisão de r_1+r_2 por a.*

Prova. Sejam q_1 e q_2 inteiros tais que

$$m = aq_1 + r_1 \quad \text{e} \quad n = aq_2 + r_2.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} m+n &= (aq_1 + r_1) + (aq_2 + r_2) \\ &= (aq_1 + aq_2) + (r_1 + r_2) \\ &= a(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Agora, como $d \mid a$, existe c inteiro tal que $a = dc$. Logo,

$$\begin{aligned} m+n &= a(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) \\ &= dc(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2) \\ &= d(cq_1 + cq_2) + (r_1 + r_2). \end{aligned}$$

Veja que não necessariamente temos $r_1 + r_2 < d$. Assim, dividimos $r_1 + r_2$ por d, obtendo quociente q_3 e resto r, ou seja,

$$r_1 + r_2 = dq_3 + r, \quad \text{com} \quad 0 \le r < d.$$

Logo,

$$\begin{aligned} m+n &= d(cq_1 + cq_2) + (r_1 + r_2) \\ &= d(cq_1 + cq_2) + dq_3 + r \\ &= d(cq_1 + cq_2 + q_3) + r \end{aligned}$$

Portando, fazendo $q = cq_1 + cq_2 + q_3$, concluímos que $m + n = dq + r$, com $0 \leq r < d$. Daí, segue que o resto da divisão de $m + n$ por d é o mesmo resto da divisão de $r_1 + r_2$ por d. $\square$

Exemplo 3 (CMF). *A professora de João Lucas pediu que ele dividisse o resultado da soma $43 + 2649 + 369275 + 91234871$ por 5. João Lucas efetuou todas as contas corretamente e encontrou como resto da divisão o valor:*

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

(e) 4.

Solução. Note que $5 \mid 10$. Logo, uma vez que o resto da divisão de um número inteiro positivo por 10 é seu algarismo das unidades, basta utilizar a proposição 2 e encontrar o resto da divisão de $3 + 9 + 5 + 1 = 18$ por 5. Esse resto é igual a 3, pois $18 = 5 \cdot 3 + 3$:

$$\begin{array}{r|l} 1\,8 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \end{array}$$

$\square$

Aplicando indução, podemos estender a proposição 2 a uma quantidade qualquer de números inteiros positivos m_1, m_2, ..., m_k.

Proposição 4. *Sejam m_1, m_2, ..., m_k, a e d inteiros positivos tais que $d \mid a$. Se r_1, r_2, ..., r_k são os restos das divisões de m_1, m_2, ..., m_k por a, respectivamente, então o resto da divisão da soma $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ por d é o mesmo resto da divisão de $r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ por d. Em particular, o resto da divisão de $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ por a é o mesmo resto da divisão de $r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ por a.*

Agora, observe o seguinte exemplo

Exemplo 5. *Encontre o resto da divisão do produto* $2025 \cdot 2026$ *por* 7*.*

Solução. Podemos encontrar esse resto efetuando a multiplicação $2025 \cdot 2026$:

$$
\begin{array}{r}
2\,0\,2\,5 \\
\times\quad 2\,0\,2\,6 \\
\hline
1\,2\,1\,5\,0 \\
4\,0\,5\,0 \\
4\,0\,5\,0\,\cdot \\
\hline
4\,1\,0\,2\,6\,5\,0
\end{array}
$$

e, em seguida, efetuar a divisão $4051 \div 7$. Assim fazendo, obtemos

$$
\begin{array}{r|l}
4\,1\,0\,2\,6\,5\,0 & 7 \\
\cline{2-2}
6\,0 & 5\,8\,6\,0\,9\,2 \\
4\,2 & \\
0\,6\,5 & \\
0\,2\,0 & \\
6 &
\end{array}
$$

Logo, o resto da divisão de $2025 \cdot 2026$ por 7 é igual a 6.

Por outro lado, como vimos no exemplo 1, os restos das divisões de 2025 e 2026 por 7 são iguais a 2 e 3, respectivamente. Agora, observe que $2 \cdot 3 = 6$, que é o resto da divisão de $2025 \cdot 2026$ por 7.

Como no exemplo 1, aqui também não se trata de uma coincidência. De fato, temos

$$2025 = 7 \cdot 289 + 2 \quad \text{e} \quad 2026 = 7 \cdot 289 + 3.$$

Denotando $q_1 = 289$, obtemos

$$
\begin{aligned}
2025 \cdot 2026 &= (7 \cdot q_1 + 2)(7 \cdot q_1 + 3) \\
&= 49q_1^2 + 21q_1 + 14q_1 + 6 \\
&= 49q_1^2 + 35q_1 + 6 \\
&= 7(7q_1^2 + 5q_1) + 6.
\end{aligned}
$$

Desse modo, podemos escrever $2025 \cdot 2026 = 7q + 6$, em que $q = 7q_1^2 + 5q_1 \in \mathbb{Z}$. Portanto, como $6 < 7$ e o resto é único, temos que 6 é o resto da divisão de $2025 \cdot 2026$ por 7. $\square$

De modo mais geral, temos a seguinte

Proposição 6. *Sejam m, n, a e d números inteiros positivos tais que $d \mid a$. Se r_1 e r_2 são os restos das divisões de m e n por a, respectivamente, então o resto da divisão de mn por d é o mesmo resto da divisão de r_1r_2 por d. Em particular, o resto da divisão de mn por a é o mesmo resto da divisão de r_1r_2 por a.*

Prova. Sejam q_1 e q_2 inteiros tais que

$$m = aq_1 + r_1 \quad \text{e} \quad n = aq_2 + r_2.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} mn &= (aq_1 + r_1)(aq_2 + r_2) \\ &= a^2q_1q_2 + aq_1r_2 + aq_2r_1 + r_1r_2 \\ &= a(aq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2. \end{aligned}$$

Uma vez que $d \mid a$, existe c inteiro tal que $a = dc$. Logo,

$$\begin{aligned} mn &= a(aq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2 \\ &= dc(aq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2 \\ &= d(caq_1q_2 + cq_1r_2 + cq_2r_1) + r_1r_2. \end{aligned}$$

Agora dividimos r_1r_2 por d, obtendo quociente q_3 e resto r, ou seja,

$$r_1r_2 = dq_3 + r, \quad \text{com} \quad 0 \le r < d.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} mn &= d(caq_1q_2 + cq_1r_2 + cq_2r_1) + r_1r_2 \\ &= d(caq_1q_2 + cq_1r_2 + cq_2r_1) + dq_3 + r \\ &= d(caq_1q_2 + cq_1r_2 + cq_2r_1 + q_3) + r \end{aligned}$$

Sendo assim, denotando $q = caq_1q_2 + cq_1r_2 + cq_2r_1 + q_3 \in \mathbb{Z}$, concluímos que $mn = dq + r$, com $0 \le r < d$. Portanto, o resto da divisão de mn por d é o mesmo resto da divisão de r_1r_2 por d. $\square$

Exemplo 7. *Encontre o resto da divisão de* $2457 \cdot 8756$ *por* 5.

Solução. Os restos das divisões de 2457 e 8756 por 10 são, respectivamente, iguais a 7 e 6. Logo, o resto da divisão de $2457 \cdot 8756$ por 5 é o mesmo resto da divisão de $7 \cdot 6 = 42$ por 5. Esse resto é igual a 2, pois $42 = 5 \cdot 8 + 2$. $\square$

Exemplo 8. *Qual é o resto da divisão de* 2019^3 *por* 13*?*

Solução. Dividindo 2019 por 13, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 2\,0\,1\,9 & 1\,3 \\ \cline{2-2} 7\,1 & 1\,5\,5 \\ 6\,9 & \\ 4 & \end{array}$$

Logo, o resto da divisão de 2019 por 13 é 4. Aplicando a proposição 6, temos que o resto da divisão de $2019^2 = 2019 \cdot 2019$ por 13 é igual ao resto da divisão de $4 \cdot 4 = 16$ por 13, que é claramente igual a 3, pois $16 = 13 \cdot 1 + 3$. Apliquemos mais uma vez a proposição 6, agora ao produto $2019^2 \cdot 2019 = 2019^3$. Ela diz que o resto da divisão de 2019^3 por 13 é igual ao resto da divisão do produtos dos restos de 2019^2 e 2019 por 13, ou seja, é igual ao resto da divisão de $3 \cdot 4 = 12$ por 13. Como $12 < 13$, esse resto é igual a 12. $\square$

Observação 9. *Em resumo, o argumento da solução anterior mostrou que o resto da divisão de* 2019^3 *por* 13 *é igual ao resto da divisão de* 4^3 *por* 13 *(*4 *é o resto da divisão de* 2019 *por* 13*). De fato, escrevendo* $2019 = 13q + 4$*, obtemos*

$$\begin{aligned} 2019^3 &= (13q + 4)^3 \\ &= (13q)^3 + 3 \cdot (13q)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 13q \cdot 4^2 + 4^3 \\ &= 13(13^2q^3 + 12 \cdot 13q^2 + 48q) + 4^3. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $Q = q^3 + 12q^2 + 48q$*, temos que* $2019^3 = 13Q + 4^3$*, de maneira que o resto da divisão de* 2019 *por* 13 *é igual ao resto da divisão de* $4^3 = 64$ *por* 13*:*

$$\begin{array}{r|l} 64 & 13 \\ \cline{2-2} 12 & 4 \end{array}$$

Aplicando indução, podemos estender a proposição 6 a uma quantidade qualquer de números inteiros positivos m_1, m_2, $\ldots$, m_k.

Proposição 10. *Sejam m_1, m_2, $\ldots$, m_k, a e d inteiros positivos tais que $d \mid a$. Se r_1, r_2, $\ldots$, r_k são os restos das divisões de m_1, m_2, $\ldots$, m_k por a, respectivamente, então o resto da divisão de $m_1 m_2 \ldots m_k$ por d é o mesmo resto da divisão de $r_1 r_2 \ldots r_k$ por d. Em particular, o resto da divisão de $m_1 m_2 \ldots m_k$ por a é o mesmo resto da divisão de $r_1 r_2 \ldots r_k$ por a.*

Vejamos mais um exemplo

Exemplo 11. *Encontre o resto da divisão de $2021 \cdot 2020 \cdot 2019 + 2019^3$ por 13.*

Solução. Vamos combinar as proposições 4 e 10. Dividindo 2019 por 13, obtemos

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 13 \\ \cline{2-2} 71 & 155 \\ 69 & \\ 4 & \end{array}$$

Assim, os restos da divisão de 2019, 2020 e 2021 por 13 são respectivamente iguais a 4, 5 e 6. Além disso, já sabemos que o resto da divisão de 2019^3 por 13 é igual a 12. Logo, o resto da divisão de $2021 \cdot 2020 \cdot 2019 + 2019^3$ por 13 por 13 é igual ao resto da divisão de $6 \cdot 5 \cdot 4 + 12 = 132$ por 13. Mas, como $132 = 13 \cdot 10 + 2$, o resto desejado é igual a 2. $\square$

Exemplo 12. *Qual é o resto da divisão de 9^{2023} por 8?*

Solução. Veja que $9 = 8 \cdot 1 + 1$, logo, o resto da divisão de 9 por 8 é igual a 1. Portanto, aplicando a proposição 10 para 2023 fatores iguais a 9, temos que o resto da divisão de $9^{2023} = \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{\text{2023 fatores}}$ é igual ao resto da divisão de $1^{2023} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{2023 fatores}} = 1$. Assim, concluímos que o resto da divisão de 9^{2023} por 8 é igual a 1. □

Generalizando o exemplo anterior, fazendo m_1, m_2, ..., m_k todos iguais a um mesmo natural m, o qual deixa resto r na divisão por a, obtemos o seguinte

Corolário 13. *Sejam m, k e a inteiros positivos tais que r é o resto da divisão de m por a. Então, o resto da divisão de m^k por a é o mesmo resto da divisão de r^k por a.*

Encerramos essa aula apresentando mais uma aplicação interessante do Algoritmo da Divisão. Para tanto, vamos utilizar também a versão mais simples do Princípio das Gavetas de Dirichlet: se $n+1$ objetos são guardados em n gavetas, então há uma gaveta com pelo menos 2 objetos.

Exemplo 14. *Mostre que todo número natural possui um múltiplo não nulo que se escreve apenas com os algarismos 1 e 0 (na base decimal).*

Solução. Seja n um número natural. Considere a sequência de $n+1$ números naturais

$$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111\ldots1}_{n+1 \text{ algarismos}}. \tag{1}$$

Agora, considere as seguintes "gavetas": G_0 é a gaveta formada pelos números naturais que deixam resto 0 quando divididos por n; G_1 é a gaveta formada pelos números naturais que deixam resto 1 quando divididos por n; G_2 é a gaveta formada pelos números naturais que deixam resto 2 quando divididos por n, e assim por diante, até G_{n-1}, que é a gaveta formada pelos números naturais que deixam resto $n-1$ quando divididos por n.

Veja que são n gavetas, pois os restos numa divisão por n variam de 0 até $n-1$. Por outro lado, temos $n+1$ números na sequência (1). Então, pelo Princípio das Gavetas, uma das gavetas contém pelo menos dois números da sequência.

Isso significa que dois dos números da sequência deixam um mesmo resto quando divididos por n, digamos r. Assim, existem naturais k, l, p, q tais que $1 \leq k < l \leq n + 1$ e

$$\underbrace{111\ldots1}_{k\,\text{algarismos}} = np + r \quad \text{e} \quad \underbrace{111\ldots1}_{l\,\text{algarismos}} = nq + r.$$

Subtraindo o primeiro número do segundo, obtemos a igualdade

$$111\ldots100\ldots0 = n(q - p),$$

em que o número do primeiro membro tem k algarismos iguais a 0 e $l - k$ algarismos iguais a 1. Mas, pela igualdade acima, o número do primeiro membro é múltiplo de n. $\square$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. Recomendamos que os professores deixem os alunos refletirem sobre os exemplos apresentados por alguns minutos, antes de explicarem as soluções. Ressaltamos, ainda, a importância de que os alunos tentem encontrar as soluções por meios próprios. Mesmo que eles não as encontrem, ou apresentem uma ou mais soluções erradas, esse processo é fundamental para a aprendizagem.

Idealmente, apresente aos alunos outros exemplos que possam ser resolvidos utilizando as proposições 4 e 10 e o corolário 13. Alguns deles podem ser encontrados na referência [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. C. Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 5: Teoria dos Números*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2022.