Material Teórico - Módulo de Geometria Analítica 2

Áreas de Polígonos

Terceiro Ano - Médio

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

1 Área de um triângulo

Na aula *Equação da Reta* (Módulo 1 de Geometria Analítica) estudamos a condição para que três pontos $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$ sejam colineares:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x & x_1 \\ y_1 & y_2 & y & y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Naquela aula, deduzimos esta condição de alinhamento de duas maneiras distintas. Em uma delas, provamos que a área do triângulo ABC, cujos vértices são $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$, é dada por

$$(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

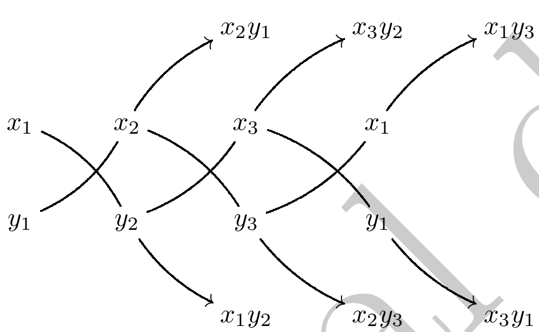
onde

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= |x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3|.$$

No caso em que os pontos são colineares, o triângulo tem área zero e obtemos (1)).

O cálculo da expressão acima pode ser facilmente recordado se percebermos que ele pode ser obtido de acordo com o seguinte esquema:



No diagrama acima, uma seta indica que os elementos que ela percorre serão multiplicados para gerar o produto que aparece no final da seta.

Os produtos x_1y_2, x_2y_3 e x_3y_1 são tomados com sinal positivo, enquanto os produtos x_2y_1, x_3y_2 e x_1y_3 são tomados com sinal negativo. Em seguida, tomamos o valor absoluto da expressão assim obtida e multiplicamos o resultado por $\frac{1}{2}$.

Também é possível escrever essa expressão como um *determinante* 3×3:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Sugerimos que, a título de recordação, o leitor leia a primeira seção da aula *Equação da Reta*, onde poderá encontrar os detalhes da exposição acima.

A seguir, iremos deduzir novamente a fórmula (2), dessa vez usando as fórmulas da distância entre dois pontos e da distância entre ponto e reta.

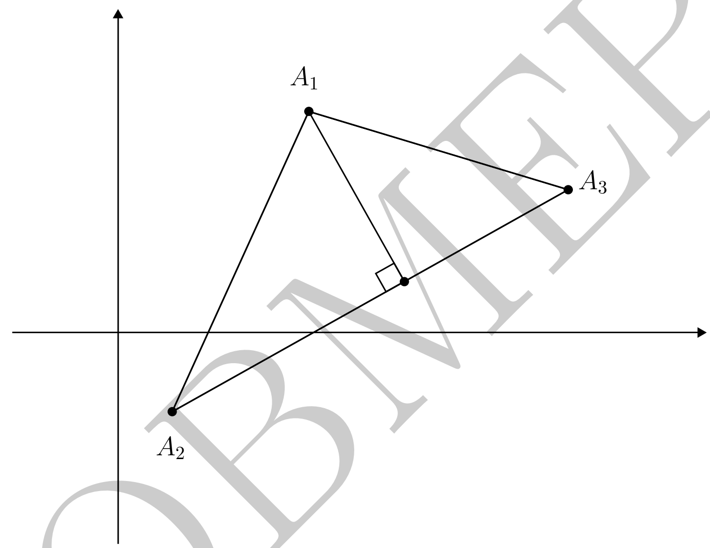


Figura 1: a área de $A_1A_2A_3$ é $\frac{1}{2} \cdot A_2A_3 \cdot d(A_1, A_2A_3)$.

Na figura 1 vemos o triângulo $A_1A_2A_3$, de vértices $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$.

É bem sabido que a área do triângulo $A_1A_2A_3$, que vamos denotar por $(A_1A_2A_3)$, é dada por

$$(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \cdot A_2A_3 \cdot d(A_1, A_2A_3),$$

onde A_2A_3 é o comprimento do segmento ligando os pontos A_2 e A_3 e $d(A_1, A_2A_3)$ é a distância entre o ponto A_1 e a reta que passa pelos pontos A_2 e A_3.

Nas aulas anteriores, aprendemos a calcular a distância entre dois pontos e a distância entre ponto e reta:

$$A_2A_3 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

e

$$d(A_1, A_2A_3) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

onde $ax + by + c = 0$ é a equação da reta A_2A_3.

Para obter a equação da reta A_2A_3, podemos usar a fórmula (1):

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x & x_2 \\ y_2 & y_3 & y & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2y_3 + x_3y + y_2x - x_3y_2 - y_3x - x_2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2) = 0.$$

Dessa forma, $a = y_2 - y_3$, $b = x_3 - x_2$ e $c = x_2y_3 - x_3y_2$. Substituindo tais valores na expressão acima para $d(A_1, A_2A_3)$, obtemos

$$d(A_1, A_2A_3) = \frac{|(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}.$$

Observe que o denominador dessa última fração é exatamente igual a A_2A_3, de forma que

$$A_2A_3 \cdot d(A_1, A_2A_3) = |(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|.$$

Portanto, a área do triângulo pode ser escrita como

$$(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2|,$$

e essa última expressão é exatamente (2).

Observação 1. *Agrupando termos semelhantes* (2), *pode-se verificar diretamente que a área do triângulo $A_1A_2A_3$ é igual a*

$$\begin{aligned}(A_1A_2A_3) &= \tfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)|.\end{aligned} \tag{4}$$

Vejamos um exemplo de aplicação da fórmula (2).

Exemplo 2. *A área de um triângulo ABC é $(ABC) = 4$, e dois de seus vértices são $A = (2, 1)$ e $B = (3, -2)$. Sabendo que o terceiro vértice C encontra-se sobre o eixo das abscissas, encontre suas coordenadas.*

Solução. Como C está sobre o eixo das abscissas, temos que $C = (x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$. Usando a fórmula (2), obtemos

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Dessa igualdade, segue que

$$|-4 + x - 3 + 2x| = 8$$

ou, o que é o mesmo, $|3x - 7| = 8$. Assim, $3x - 7 = -8$ ou $3x - 7 = 8$, de sorte que $x = -\frac{1}{3}$ ou $x = 5$.

Logo, $C = (-1/3, 0)$ ou $C = (5, 0)$. □

2 Área de polígonos

Vamos mais uma vez relembrar o que vimos na aula sobre a equação da reta.

Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 os quatro vértices de um quadrilátero convexo, nomeados consecutivamente no sentido anti-horário (veja a figura 2).

Podemos verificar diretamente que

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 & x_2 \\ y_2 & y_3 & y_4 & y_2 \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{5}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade acima por 2, e utilizando (2), obtemos uma igualdade cujo segundo membro é igual à soma das áreas dos triângulos $A_1A_2A_4$ e $A_2A_3A_4$, ou seja, é igual à área do quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$. Portanto,

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

onde $(A_1A_2A_3A_4)$ denota a área do quadrilátero e devemos considerar o *valor absoluto* da expressão que está entre as barras verticais.

Em geral, se $A_1A_2 \ldots A_n$ é um polígono convexo com n lados e tal que os vértices A_1, A_2, ..., A_n são enumerados consecutivamente num sentido de percurso fixado (horário ou anti-horário), então sua área é dada por

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y_1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Aqui, novamente devemos considerar o *valor absoluto* da expressão que está entre as barras verticais.

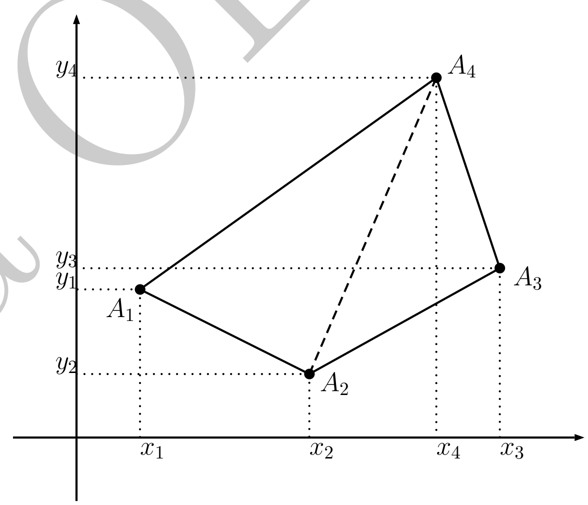


Figura 2: o quadrilátero convexo $A_1A_2A_3A_4$, dividido nos triângulos $A_1A_2A_4$ e $A_2A_3A_4$.

Exemplo 3. *Calcule a área de um polígono regular de n lados em função de n e do raio R do círculo circunscrito a esse polígono.*

Solução. Podemos escolher o sistema de eixos de modo que a origem coincida com o centro do círculo circunscrito ao polígono.

Também podemos supor, sem perda de generalidade, que um dos vértices do polígono é o ponto $(R, 0)$. Então, sendo $\theta = \frac{2\pi}{n}$ a medida do ângulo central correspondente a um lado do polígono, os demais vértices correspondem aos pontos $(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta)$, $(R\cos 2\theta, R\operatorname{sen} 2\theta)$, $(R\cos 3\theta, R\operatorname{sen} 3\theta), \ldots (R\cos(n-2)\theta, R\operatorname{sen}(n-2)\theta)$ e $(R\cos(n-1)\theta, R\operatorname{sen}(n-1)\theta)$ (veja a figura 3).

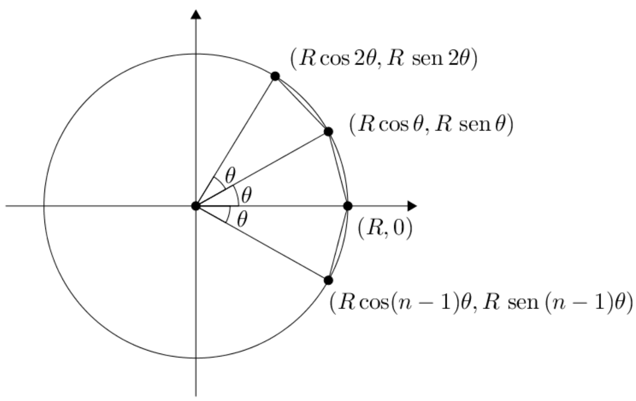


Figura 3: um polígono regular de n lados.

Assim, denotando por A_n a área de um polígono regular de n lados inscrito no círculo de raio R, obtemos

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} R & R\cos\theta & R\cos 2\theta & \cdots & R\cos(n-1)\theta & R \\ 0 & R\,\text{sen}\,\theta & R\,\text{sen}\,2\theta & \cdots & R\,\text{sen}\,(n-1)\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{R^2}{2}\cdot|\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\theta\cos\theta + \text{sen}\,3\theta\cos 2\theta \\
&\qquad + \text{sen}\,4\theta\cos 3\theta + \cdots + \text{sen}\,(n-1)\theta\cos(n-2)\theta \\
&\qquad - \text{sen}\,\theta\cos 2\theta - \text{sen}\,2\theta\cos 3\theta - \text{sen}\,3\theta\cos 4\theta \\
&\qquad - \cdots - \text{sen}\,(n-2)\theta\cos(n-1)\theta - \text{sen}\,(n-1)\theta|.
\end{aligned}$$

Agrupando os produtos de senos e cossenos e usar a fórmula do seno da diferença

$$\text{sen}\,(\alpha-\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha,$$

obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{R^2}{2}\cdot\big|\text{sen}\,\theta + \big(\text{sen}\,2\theta\cos\theta - \text{sen}\,\theta\cos 2\theta\big) \\
&\qquad + \big(\text{sen}\,3\theta\cos 2\theta - \text{sen}\,2\theta\cos 3\theta\big) \\
&\qquad + \big(\text{sen}\,4\theta\cos 3\theta - \text{sen}\,3\theta\cos 4\theta\big) \\
&\qquad + \cdots + \big(\text{sen}\,(n-1)\theta\cos(n-2)\theta \\
&\qquad - \text{sen}\,(n-2)\theta\cos(n-1)\theta\big) \\
&\qquad - \text{sen}\,(n-1)\theta\big| \\
&= \frac{R^2}{2}\cdot\big|\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,(2\theta-\theta) + \text{sen}\,(3\theta-2\theta) + \cdots \\
&\qquad + \text{sen}\,((n-1)\theta-(n-2)\theta) - \text{sen}\,((n-1)\theta)\big| \\
&= \frac{R^2}{2}\cdot|(n-1)\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,((n-1)\theta)|.
\end{aligned}$$

Agora, como $\theta = \frac{2\pi}{n}$, temos que

$$\text{sen}\,((n-1)\theta) = \text{sen}\,\left(2\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = -\text{sen}\,\frac{2\pi}{n} = -\text{sen}\,\theta.$$

Então,

$$A_n = \frac{R^2}{2}\cdot\big|(n-1)\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\theta\big| = \frac{nR^2}{2}\cdot\big|\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}\big|.$$

□

Podemos resumir o resultado do exemplo anterior escrevendo

$$\boxed{A_n = \frac{nR^2}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}}$$

Observe que não há necessidade do módulo na última expressão acima, pois, como $n \geq 3$, temos $\frac{2\pi}{n} \leq \pi$ e, daí, sen $\frac{2\pi}{n} > 0$.

Como casos particulares da fórmula acima, temos que

$$A_3 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4},\quad A_4 = 2R^2 \quad\text{e}\quad A_6 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$$

são as áreas do triângulo equilátero, do quadrado e do hexágono regular, respectivamente, dadas em função do raio R do círculo circunscrito a tais polígonos.

3 Uma aplicação interessante

Nesta seção, aplicaremos os resultados das seções anteriores para resolver um problema não trivial.

Exemplo 4. *Seja ABC um triângulo. Sobre o lado AB desse triângulo, marcamos dois pontos P e Q de modo que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB}$, e sobre o lado BC desse mesmo triângulo, marcamos dois pontos M e N tais que $\overline{BM} = \overline{MN} = \overline{NC}$. Os segmentos AM, AN, CP e CQ se intersectam e, ao fazê-lo, delimitam um quadrilátero contido no interior do triângulo, o qual se encontra destacado em verde na figura 4. Mostre que a razão entre as áreas do triângulo ABC e do quadrilátero em questão será sempre a mesma, não dependendo da escolha particular do triângulo ABC.*

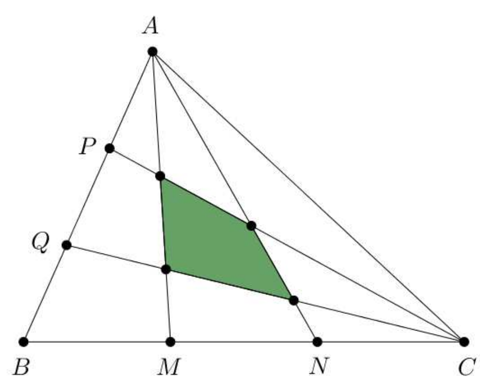


Figura 4: quadrilátero no interior de um triângulo.

Solução. Chamemos de T a área do triângulo ABC e de L a área do quadrilátero destacado na figura 4. Vamos mostrar que $\frac{T}{L} = \frac{70}{9}$.

Escolha um sistema de eixos de modo que $C = (0, 0)$ seja a origem e $B = (b, 0)$ esteja sobre o eixo das abscissas. Além disso, seja $A = (x_A, y_A)$. A área do triângulo ABC é

$$T = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & x_A & b & 0 \\ 0 & y_A & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{|b \cdot y_A|}{2}.$$

Vamos, agora, encontrar as coordenadas dos vértices do quadrilátero situado no interior do triângulo.

Como os pontos P e Q dividem o lado AB em três partes iguais, temos

$$y_Q = \frac{y_A}{3} \ \text{ e } \ y_P = \frac{2y_A}{3}.$$

Por outro lado, a equação da reta AB é $y = \frac{y_A}{x_A - b} \cdot (x - b)$. Daí, segue que $x = b + \frac{y(x_A - b)}{y_A}$, de sorte que

$$x_Q = b + \frac{x_A - b}{3} = \frac{2b + x_A}{3}$$

e

$$x_P = b + \frac{2x_A - 2b}{3} = \frac{b + 2x_A}{3}.$$

Uma vez que $C = (0, 0)$ é a origem, as equações das retas CP e CQ são, respectivamente,

$$CP : y = \frac{y_P}{x_P} \cdot x = \frac{2y_A}{b + 2x_A} \cdot x,$$

$$CQ : y = \frac{y_Q}{x_Q} \cdot x = \frac{y_A}{2b + x_A} \cdot x.$$

Para obter as equações das retas AM e AN, começamos notando que as coordenadas de M e N são $M = (\frac{2b}{3}, 0)$ e $N = (\frac{b}{3}, 0)$, pois os pontos M e N dividem o lado BC em três partes iguais. Assim, as equações reduzidas das retas AM e AN são

$$AM : y = \frac{y_A}{3x_A - 2b} \cdot (3x - 2b),$$

$$AN : y = \frac{y_A}{3x_A - b} \cdot (3x - b).$$

Estamos finalmente em posição de calcular as coordenadas dos quatro pontos de interseção dos dois pares de retas acima. Esses quatro pontos, que vamos chamar de $U = CP \cap AM$, $V = CQ \cap AM$, $W = CQ \cap AN$ e $Z = CP \cap AN$, são os vértices do quadrilátero cuja área L queremos comparar com a área de ABC.

Por exemplo, para obter as coordenadas do ponto U, resolvemos primeiramente a equação

$$\overbrace{\frac{2y_A}{2x_A + b} \cdot x}^{CP} = y = \underbrace{\frac{y_A}{3x_A - 2b} \cdot (3x - 2b)}_{AM}$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{2x}{2x_A + b} = \frac{3x - 2b}{3x_A - 2b}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x_A + b} = \frac{3x - 2b}{3x_A - 2b} &\Rightarrow \frac{6x_A - 4b}{2x_A + b} \cdot x = 3x - 2b \\ &\Rightarrow 2b = \left(3 - \frac{6x_A - 4b}{2x_A + b}\right) \cdot x \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\cancel{b} = \frac{7\cancel{b}}{2x_A + b} \cdot x \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{2x_A + b}{7}. \end{aligned}$$

Portanto, $x_U = \frac{2x_A + b}{7}$ e, substituindo esse resultado na equação de CP, encontramos

$$y_U = \frac{2y_A}{2x_A + b} \cdot \underbrace{\frac{4x_A + 2b}{7}}_{x_U} \Rightarrow y_U = \frac{4y_A}{7}.$$

Assim, as coordenadas do ponto U são

$$U = \left(\frac{2x_A + b}{7}, \frac{4y_A}{7}\right).$$

Raciocinando de modo análogo, encontramos as coordenadas dos demais pontos:

$$V = \left(\frac{x_A + 2b}{4}, \frac{y_A}{4}\right),$$

$$W = \left(\frac{x_A + 2b}{7}, \frac{y_A}{7}\right),$$

$$Z = \left(\frac{2x_A + b}{5}, \frac{2y_A}{5}\right).$$

Agora, podemos utilizar a fórmula (6) para calcular a área L do quadrilátero $UVWZ$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_U & x_V & x_W & x_Z & x_U \\ y_U & y_V & y_W & y_Z & y_U \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{4x_A+2b}{7} & \frac{x_X+2b}{4} & \frac{x_A+2b}{7} & \frac{2x_A+b}{5} & \frac{4x_A+2b}{7} \\ \frac{4y_A}{7} & \frac{y_A}{4} & \frac{y_A}{7} & \frac{2y_A}{5} & \frac{4y_A}{7} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{\cancel{4x_Ay_A} + 2by_A}{28} + \frac{\cancel{x_Ay_A} + 2by_A}{28} + \frac{\cancel{2x_Ay_A} + 4by_A}{35} \right. \\ &\quad + \frac{\cancel{8x_Ay_A} + 4by_A}{35} - \frac{\cancel{4x_Ay_A} + 8by_A}{28} - \frac{\cancel{x_Ay_A} + 2by_A}{28} \\ &\quad \left. - \frac{\cancel{2x_Ay_A} + by_A}{35} - \frac{\cancel{8x_Ay_A} + 4by_A}{35} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{3by_A}{35} - \frac{6by_A}{28} \right|. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$L = \frac{9}{140} \cdot |by_A|,$$

de sorte que

$$\frac{T}{L} = \frac{|\cancel{by_A}|/2}{9|\cancel{by_A}|/140} = \frac{70}{9}.$$

□

Dicas para o Professor

Três encontros de 50 minutos cada são suficientes para cobrir o material desta aula.

Caso você já tenha visto com seus alunos a aula sobre a equação da reta, pode pular a Seção 1 ou percorrê-la rapidamente, a título de revisão. No entanto, há, na Seção 1, uma demonstração diferente daquela vista anteriormente para a fórmula da área do triângulo. Você pode explorar essa nova abordagem como aplicação das fórmulas para as distâncias de ponto a ponto e de ponto a reta.

É importante que você enfatize a necessidade de se considerar o valor absoluto nas fórmulas. O exemplo 2 mostra que a presença do módulo na fórmula permite que possamos encontrar as duas possíveis soluções para o problema.

O exemplo 4 é mais elaborado e trabalhoso, sendo mais adequado a um trabalho de pesquisa com os alunos do que para uma aula expositiva. De todo modo, uma possibilidade é fazer em sala o caso em que ABC é retângulo em C; isso facilita bastante os cálculos, uma vez que podemos escolher a abscissa do ponto A como sendo igual a 0.

Sugestões de Leitura Complementar

1. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol.3. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 1998.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar*, vol.2. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2013.