Material Teórico - Probabilidade – Miscelânea de Exercícios

Cálculo de probabilidades - Parte 1

Segundo Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

18 de junho de 2019

1 Cálculo de probabilidades

Neste módulo, resolvemos alguns exercícios sobre o cálculo de probabilidades, com o intuito de aprofundar nossa compreensão da teoria.

Exemplo 1 (UERJ). *Cinco casais, cada um dos quais formado por um homem e uma mulher, são aleatoriamente dispostos em grupos de duas pessoas cada. Calcule a probabilidade de que todos os grupos sejam formados por:*

(a) um marido e sua mulher;

(b) pessoas de sexos diferentes.

Solução de (a). Vamos formar uma fila com as dez pessoas e usar tal fila para definir os pares de pessoas: o primeiro par será formado pela primeira e segunda pessoas da fila, o segundo par pela terceira e quarta pessoas da fila e assim sucessivamente. Ao fazermos isso, cada par de pessoas é selecionado de maneira equiprovável. Assim, essa é uma boa escolha para nosso espaço amostral. Esse espaço amostral possui 10! escolhas possíveis. Dentre elas, devemos contar em quantas os pares formados correspondem aos cincos casais originais. Há 5! maneiras de escolher a ordem dos casais e 2^5 maneiras (ao todo) de escolher, para cada casal, a ordem entre marido e mulher. Com isso, temos que a probabilidade desejada é

$$\frac{5! \cdot 2^5}{10!} = \frac{1}{945}.$$

Solução alternativa de (a). Vamos formar os pares de pessoas selecionando uma pessoa por vez e, em seguida, calculando a probabilidade de que cada um desses pares seja um dos casais (originais). A primeira pessoa pode ser selecionada de forma arbitrária. Uma vez que ela tenha sido selecionada, a probabilidade da segunda pessoa ser seu cônjuge é $1/9$ (pois apenas uma das 9 pessoas restantes é o cônjuge da primeira). Feito isso, a terceira pessoa pode ser selecionada de forma arbitrária e a probabilidade da pessoa seguinte (quarta) ser seu cônjuge é $1/7$ (pois restam 7 pessoas, das quais apenas uma é o cônjuge da terceira selecionada). Argumentando de maneira análoga, concluímos que a probabilidade de o próximo par selecionado também ser um dos casais é $1/5$. Prosseguindo de maneira análoga, temos que a probabilidade do evento do item (a) é:

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{945}.$$

Solução de (b). Assim como na primeira solução do item (a), vamos considerar o espaço amostral com as 10! possíveis filas. Desse total de filas, devemos contar em quantas as pessoas das posições $2i - 1$ e $2i$ são de sexos diferentes, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. (Mas veja que as pessoas de posição $2i$ e $2i + 1$ podem ser ou não de um mesmo sexo). Começamos escolhendo, dentre a primeira e a segunda posições da fila, qual será ocupada por um homem; depois, fazemos o mesmos em relação à terceira e a quarta posições, entre a quinta e a sexta, e assim sucessivamente. Há 2^5 maneiras de realizar tais escolhas. Uma vez feito isso, há 5! maneiras de permutar os homens e 5! maneiras de permutar as mulheres (terminando, assim, de montar a fila). Com isso, a probabilidade desejada é

$$\frac{2^5 \cdot 5! \cdot 5!}{10!} = \frac{8}{63}.$$

Solução alternativa de (b). Como na solução alternativa de (a), vamos selecionar uma pessoa por vez. Dessa vez, precisamos que cada homem fique no mesmo grupo de uma mulher, mas não necessariamente de sua esposa. A primeira pessoa por ser selecionada de forma arbitrária. A segunda deve ser do sexo oposto à primeira, logo, há 5 pessoas, dentre as 9 restantes, que satisfazem esse critério. Condicionando ao fato de que os dois primeiros foram escolhidos de sexo diferentes, a terceira pessoa pode ser escolhida de forma arbitrária e a probabilidade da quarta ser de sexo diferente da terceira é igual a $4/7$. Continuando dessa forma, obtemos a seguinte probabilidade:

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{120}{945} = \frac{8}{63}.$$ □

Observação 2. *Na solução alternativa do Exemplo 1, fizemos uso implícito do conceito de probabilidade condicional. Mais precisamente, denotando por* $\Pr(B \mid A)$ *a probabilidade condicional de* B*, dado* A*, usamos várias vezes o fato de que, dados eventos* A *e* B*, temos*

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B \mid A).$$

Uma solução formal necessitaria definir eventos adequados $A_1, A_2, \ldots, A_5$ *(para cada um dos itens) e usar que*

$$\begin{aligned}\Pr(A_1 \cap \ldots \cap A_5) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(A_2 \mid A_1) \cdot \Pr(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ \cdot \Pr(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ \cdot \Pr(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).\end{aligned}$$

Não fizemos isso para tornar a solução mais simples/atrativa. Por outro lado, raciocínios análogos a esse, mas sem um bom entendimento das propriedades aplicadas, podem facilmente levar a erros. Por isso, tomamos o cuidado de apresentar uma solução direta, por contagem dos casos favoráveis.

O exemplo a seguir trata de um problema envolvendo o cálculo de uma *probabilidade geométrica*, tema que ainda não havia sido tocado nas aulas anteriores.

Exemplo 3 (AFA). *Um ponto é selecionado aleatoriamente em um triângulo equilátero de lado* $\ell = 3$*. A probabilidade de a distância desse ponto a qualquer vértice ser maior do que 1 é:*

(a) $1 - \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

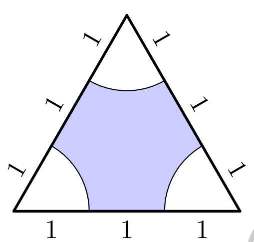
(*b*) $1 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

(*c*) $1 - \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}$.

(*d*) $1 - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{27}$.

Solução. Seja P o ponto selecionado aleatoriamente. Observe que, nesse problema, não podemos falar sobre o *número* de casos possíveis e o *número* de casos favoráveis, uma vez que a quantidade de possíveis escolhas para o ponto aleatório é infinita (e *infinito não é um número*). Precisamos, então, de outra forma de *medir* a probabilidade. O instrumento de medida adotado, neste caso, será a área. De fato, é natural interpretar a probabilidade que queremos calcular como a razão entre a área da região formada pelos pontos P que satisfazem a restrição do enunciado e a área total da região na qual P é selecionado.

A área total é a área do triângulo de lado 3; lembrando que a área de um triângulo de lado ℓ é dada pela expressão $\ell^2\sqrt{3}/4$, concluímos que a área do triângulo de lado 3 é $9\sqrt{3}/4$. Por outro lado, a região onde o ponto P deve ser selecionado para satisfazer o enunciado, ou seja, para que a distância entre ele e qualquer vértice do triângulo seja maior do que 1, é aquela realçada em azul na figura seguinte.



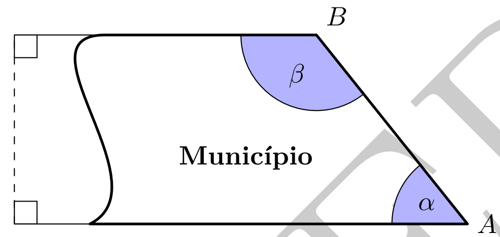
Na figura acima, removemos do triângulo inicial setores circulares de raio 1 com centros nos vértices do triângulo (esse setores correspondem às regiões ruins, onde o ponto P está a uma distância menor ou igual a 1 de algum vértice). Cada um desses setores possui ângulo central de 60° (e raio 1). Assim, a soma de suas áreas é igual à área de um semicírculo (metade de um círculo) da raio 1. Lembrando que a área de um círculo de raio r é dada por πr^2, temos que a área de um semicírculo é $\pi r^2/2$. Como $r = 1$, esse valor é $\pi/2$. Por fim, temos que a área realçada é obtida subtraindo-se esse valor da área do triângulo. Temos, então, que a probabilidade pedida é:

$$\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{9\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Logo, o item correto é (*c*). □

O próximo problema envolve o mesmo tipo de ideia.

Exemplo 4 (ENEM). *Um município de* $628\,\text{km}^2$ *é atendido por duas emissoras de rádio, com antenas situadas nos pontos* A *e* B *da figura, e cujos sinais alcançam um raio de* $10\,\text{km}$.



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente

(*a*) 20%.

(*b*) 25%.

(*c*) 30%.

(*d*) 35%.

(*e*) 40%.

Observação. Para resolver esse problema sem informações adicionais, precisamos assumir que a probabilidade de um morador se encontrar em qualquer ponto do município é uniforme. Isso quer dizer que não há trechos do município que são mais atrativos do que outros ou que concentrem uma maior quantidade de pessoas. Na prática, essa hipótese pode não ser realista.

Solução. Com o mesmo raciocínio no exemplo anterior, temos que a probabilidade desejada é a razão entre a área do município que é coberta pelas antenas e a área total do município.

Como a figura indica, as retas horizontais da figura são paralelas. Com isso, os ângulos α e β são colaterais internos e, portanto, $\alpha + \beta = 180°$. Apesar de não ser possível calcular individualmente as áreas dos setores circulares que correspondem à cobertura de cada antena, o fato de que $\alpha + \beta = 180°$ implica que, juntos, esses setores formam um semicírculo de raio $10\,\text{km}$. Logo, a soma de suas áreas é $\pi \cdot 10^2/2$ quilômetros quadrados. Por outro lado, a área total do município é dada no enunciado como sendo igual a $628\,\text{km}^2$. Usando a aproximação $\pi \approx 3{,}14$, podemos calcular a probabilidade desejada (de forma aproximada):

$$\frac{\pi \cdot 10^2/2}{628} \cong \frac{3{,}14 \cdot 100/2}{628} = \frac{157}{628} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

□

Exemplo 5 (ENEM - resumido). *José e Antônio marcam um encontro numa rodoviária entre meio-dia e uma hora da tarde. O combinado é que um espere pelo outro por no máximo 30 minutos. Quais as chances de José e Antônio viajarem juntos? Observação: José e Antônio escolhem seus horários de chegada de forma aleatória, uniforme e independente um do outro.*

(a) 0%.

(b) 25%.

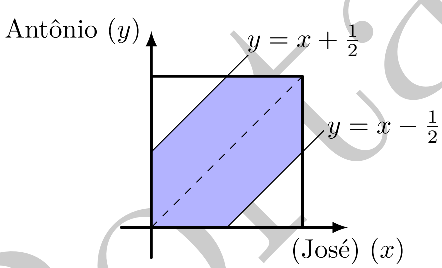
(c) 50%.

(d) 75%.

(e) 100%.

Solução. Sejam a e b os tempos, medidos em minutos, decorridos desde o meio-dia até a momento em que José e Antônio chegam à rodoviária, respectivamente. Sejam $x = a/60$ e $y = b/60$. Cada par (x, y) tal que $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$ determina o horário de chegada de José e Antônio, de modo que podemos considerar o cojunto desses pontos como o espaço amostral. Por outro lado, para que José e Antônio viagem juntos, é necessário e suficiente que tenhamos $0 \le x - y \le \frac{1}{2}$ ou $0 \le y - x \le \frac{1}{2}$.

Vamos ilustrar esse espaço amostral de modo geométrico (apesar de que o enunciado do problema não deixa isso transparecer). Para tanto, vamos usar um sistema de eixos cartesianos e observar um quadrado de lado unitário com vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$ (ver figura abaixo). Cada ponto (x, y) desse quadrado corresponde a um elemento do espaço amostral. Afirmamos que os pontos que satisfazem o enunciado são os que pertencem à região destacada da figura.



Vamos tratar dois casos. Suponha, primeiro, que $x \ge y$. Os pontos (x, y) que satisfazem isto estão abaixo da diagonal principal do quadrado (a reta tracejada, em que $y = x$). Além disso, neste caso, para que eles viagem juntos devemos ter $x - y \le 1/2$, ou seja, $y \ge x - \frac{1}{2}$. Os pontos que satisfazem isso estão acima da reta de equação $y = x - \frac{1}{2}$ (indicada na figura). Por sua vez, esse caso nos dá a parte da região realçada em azul que fica abaixo da diagonal.

No outro caso, temos que $y \ge x$. Assim, estamos considerando os pontos acima da diagonal e, nesse caso, José e Antônio viajam juntos quando $y - x \le 1/2$, ou seja, quando $y \le x + \frac{1}{2}$. Logo, temos os pontos da região azul situados abaixo da reta de equação $y = x + \frac{1}{2}$ e acima da diagonal.

Para terminar, basta calcular a razão entre a área realçada (que mede os casos favoráveis) e a área do quadrado. A área do quadrado é igual a 1 e a área da região realçada pode ser obtida subtraindo-se as áreas dos dois triângulos não marcados. Juntando os dois triângulos forma-se um quadrado de lado 1/2, logo, a soma de suas áreas é $(1/2)^2 = 1/4$. Portanto, a probabilidade desejada é

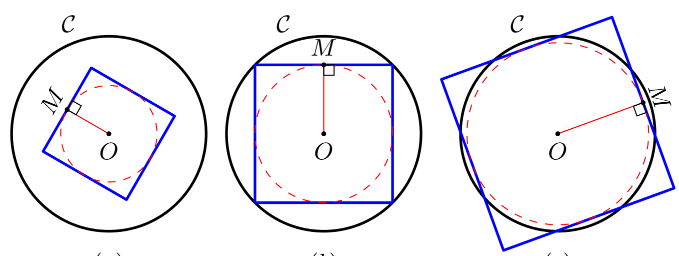
$$\frac{1 - 1/4}{1} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Com isso, o item correto é (d) □

Observação 6. *No Exemplo 5, se trocássemos no "máximo 30 minutos" por "estritamente menos que 30 minutos", a probabilidade obtida seria a mesma. O motivo é que tanto faz incluir ou não o conjunto de pontos das retas $y = x - 1/2$ e $y = x + 1/2$ dentro do conjunto dos casos favoráveis, pois essas retas possuem* área igual a zero*, não afetando o cálculo da probabilidade.*

Exemplo 7 (UFRJ). *Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo $\mathcal{C}$, de raio 2 e centro O. Em seguida, constrói-se um quadrado também centrado em O, que tem M como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado assim construído esteja inteiramente contido no círculo $\mathcal{C}$.*

Solução. Observe que a fato do quadrado estar ou não contido no círculo depende unicamente da distância entre O e M. A figura seguinte ilustra três possíveis escolhas (dentre infinitas) para o ponto M.



(a) (b) (c)

Nos dois primeiros exemplos, (a) e (b), temos situações favoráveis, ou seja, em que o quadrado está inteiramente contido no círculo $\mathcal{C}$, enquanto na última, (c), temos uma situação desfavorável. Na Figura (b) estamos na situação limítrofe, pois os vértices do quadrado estão situados sobre a borda do círculo. Neste caso, temos que a distância de M a O é a maior que ainda faz com que o quadrado esteja inteiramente contido no círculo.

Na Figura (b), seja ℓ a medida do lado do quadrado. É bem sabido que $\overline{OM} = \ell/2$ e que a diagonal do quadrado mede $\ell\sqrt{2}$. Assim, na Figura (b), temos que a diagonal do quadrado é igual ao diâmetro do círculo $\mathcal{C}$, logo, mede 4. Então,

$$\ell\sqrt{2} = 4 \implies \ell = 2\sqrt{2} \implies \overline{OM} = \sqrt{2}.$$

Com isso, os casos favoráveis são aqueles em que M se encontra dentro do círculo de raio $r = \sqrt{2}$ e centro O. Esse círculo possui área πr^2, ou seja, 2π. Como M é escolhido aleatoriamente dentro do círculo C, que possui área $\pi \cdot 2^2 = 4\pi$, temos que a probabilidade desejada no enunciado é:

$$\frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

□

Observação 8. *Na solução acima, mostramos que os casos favoráveis são aqueles nos quais $\overline{OM} \leq \sqrt{2}$. Como estamos escolhendo o ponto M dentro do círculo $\mathcal{C}$, temos que $\overline{OM}$ é no mínimo 0 e no máximo 2. Conforme comentamos anteriormente, a fato do quadrado construído estar ou não contido no círculo depende apenas de OM. Isso pode nos levar a imaginar que podemos simplesmente sortear a distância de M até O como um número entre 0 e 2 e calcular a probabilidade de tal número ser menor ou igual a $\sqrt{2}$. O valor dessa probabilidade seria $\sqrt{2}/2$, mas essa não é a resposta correta para o Exemplo 7. O problema é que, quando escolhemos M de forma uniforme dentro de C, o valor do comprimento $\overline{OM}$* não tem *probabilidade uniforme dentro do intervalo $[0, 2]$: é mais provável que $\overline{OM}$ tenha um valor grande (próximo de 2) do que um valor pequeno (próximo de 0), pois há uma proporcão de pontos maior próximos à borda do círculo do que próximos ao seu centro.*

Assim, escolher um ponto qualquer de forma uniforme e aleatória dentro de um círculo de raio 2 não é a mesma coisa que primeiro escolher um número real d de forma uniforme no intervalo $[0, 2]$ e, depois, escolher um ponto M uniformemmente dentre aqueles que possuem distância d até O.

Exemplo 9. *Escolhendo-se ao acaso três vértices de um hexágono regular, qual é a probabilidade de que eles sejam os vértices de um:*

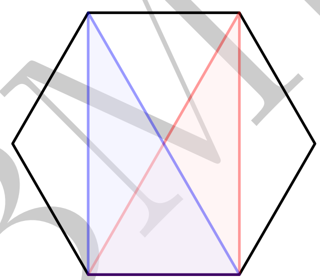
(a) triângulo retângulo?

(b) triângulo equilátero?

Solução. Vamos considerar que o espaço amostral é formado pelos conjuntos de três vértices do hexágono. Assim, o total de casos possíveis é $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. Veja que há dois tipos de triângulo (formados por três vértices do hexágono): os que possuem vértices consecutivos do hexágono (ou seja, possuem como lado um dos lados do hexágono) e os que não possuem.

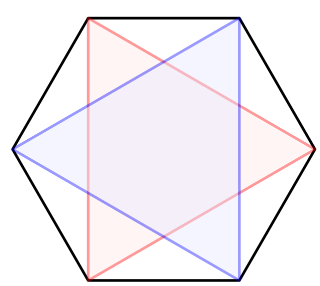
Analisemos, agora, os itens (a) e (b).

(a) Para cada tipo de triângulo (como indicado acima), vamos contar quantos deles são retângulos. Primeiro suponhamos que o triângulo contém um lado do hexágono. Fixado tal lado, há quatro possíveis escolhas para o terceiro vértice e, dentre essas, há exatamente duas em que se obtém um triângulo retângulo (veja a figura abaixo). Esses dois triângulos são tais que seus outros dois lados não coincidem com lados do hexágono. Portanto (e uma vez que o hexágono tem 6 lados), isso nós dá $6 \cdot 2 = 12$ triângulos retângulos distintos. Resta observar que, no outro caso, quando escolhemos três vértices do hexágono sem que dois deles sejam consecutivos, então os vértices serão escolhidos alternadamente e o triângulo formado será equilátero (portanto, não será retângulo). Logo, não há outros triângulos retângulos.



Com isso, a probabilidade desejada é: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\%$.

(b) Consideramos os mesmos dois casos do item anterior. Dentre os triângulos que possuem como lado um dos lados do hexágono, veja que não há nenhum equilátero. De fato, fixado qualquer lado do hexágono, para qualquer uma das 4 escolhas para o terceiro vértice o triângulo formado não é equilátero. Por outro lado, se não forem usados vértices consecutivos do hexágono, então a escolha de um de seus vértices determina unicamente os outros dois vértices, e o triângulo que eles formam é equilátero. Assim, cada vértice gera um triângulo equilátero, o que nos daria 6 triângulos equilátero. Contudo, ao fazer isso, cada triângulo é contado três vezes (uma vez para cada um de seus vértices). Logo, há apenas dois triângulos equiláteros (os que são indicados na figura abaixo):



Logo, a probabilidade procurada é $\frac{2}{20} = 10\%$.

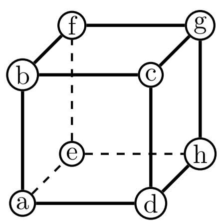
□

Exemplo 10. *Escolhendo-se três vértices de um cubo, qual a probabilidade de serem escolhidos três vértices de uma mesma face.*

Solução. Vamos considerar como espaço amostral o conjunto das todas as maneiras de escolher 3 dentre os oito vértices. Veja que há $\binom{8}{3}$ maneiras de fazer isso. Agora, queremos contar em quantas delas os pontos escolhidos estão em uma mesma face. Veja que há 6 possíveis escolhas para a face e, tendo escolhido a face, há $\binom{4}{3} = 4$ maneiras de escolher três vértices dela. Note que um conjunto de 3 vértices não pode estar contido em duas faces diferentes do cubo, logo, ao fazer isso não estamos contado nenhum conjunto mais de uma vez. Assim, a probabilidade procurada é

$$\frac{6 \cdot 4}{\binom{8}{3}} = \frac{6 \cdot 4}{56} = \frac{3}{7}. \qquad \square$$

Solução alternativa. Vamos selecionar um vértice por vez. Para isso, considere os nomes dos vértices utilizados na figura abaixo:



Como não há restrição para a escolha do primeiro vértice, podemos supor, sem perda da generalidade, que seja escolhido o vértice a. Uma vez feito isso, o segundo vértice não pode ser g, pois não existe nenhuma face que contenha a e g ao mesmo tempo. Assim, para satisfazer o problema, o segundo vértice deve ser escolhido dentre os outros seis. Contudo, a probabilidade de escolher o terceiro vértice adequadamente, depende de qual foi o segundo vértice escolhido. Por isso, vamos precisa tratar dois casos:

<u>Caso 1</u>: o segundo vértice é b, d ou e. A probabilidade de que esse caso aconteça é $3/7$ e, supondo que ele aconteça, teremos selecionado uma aresta do cubo. Com isso, haverá 4 possíveis escolhas para o terceiro vértice de modo que ele esteja em um face que contém tal aresta (por exemplo, se o segundo vértice for e, o terceiro precisa ser b, f, d ou h). Assim, neste caso, a probabilidade de que os três vértices selecionados estejam em uma mesma face é:

$$\frac{8}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}.$$

<u>Caso 2</u>: o segundo vértice é c, f ou h. A probabilidade de que esse caso aconteça é $3/7$. Por outro lado, supondo que ele aconteça, há apenas 2 possíveis escolhas para o terceiro vértice que satisfazem o enunciado (por exemplo, se o segundo vértice for c, o terceiro precisa ser b ou d). Assim, neste caso, a probabilidade de que os três vértices selecionados estejam em uma mesma face é:

$$\frac{8}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

Por fim, uma vez que os casos 1 e 2 são independentes, a probabilidade desejada é

$$2/7 + 1/7 = 3/7. \qquad \square$$

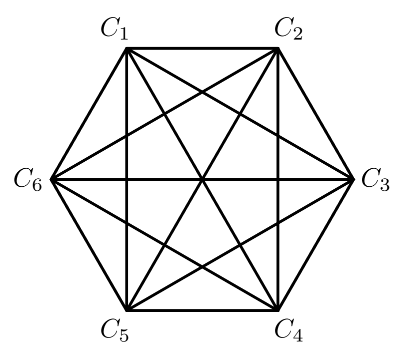
Observação 11. *A solução alternativa acima equivale a escolher como espaço amostral as sequências ordenadas de 3 vértices e contar quantas delas possuem os 3 vértices em uma mesma face. Assim, temos um espaço amostral com $8 \cdot 7 \cdot 6$ elementos, dentre os quais $8 \cdot 3 \cdot 4 + 8 \cdot 3 \cdot 2$ satisfazem o enunciado. Isso funciona bem, pois, ao selecionar todas as sequências de 3 vértices, cada conjunto de 3 vértices é contado a mesma quantidade de vezes.*

Exemplo 12 (FUVEST). *Os trabalhos da diretoria de um clube são realizados por seis comissões. Cada diretor participa de exatamente duas comissões e cada duas comissões têm exatamente um diretor em comum.*

(a) Quantos diretores tem o grupo?

(b) Escolhendo-se dois diretores ao acaso, qual é a probabilidade de que eles sejam de uma mesma comissão.

Solução. Vamos usar um truque para visualizar as comissões e seus diretores: vamos representar cada comissão por um ponto no plano, mais especificamente, vamos tomar os vértices de um hexágono, como na figura abaixo.



Analisemos, agora, os itens (a) e (b).

(a) Cada duas comissões possui exatamente um diretor em comum. Podemos, então, imaginar que sobre cada segmento de reta que liga dois vértices do hexágono, digamos C_i e C_j, iremos escrever o nome do (único) diretor comum às comissões representadas por C_i e C_j. Agora, o enunciado diz que cada diretor também só participa de duas comissões, de modo que o nome de cada diretor só é escrito uma vez. Com isso, temos que a quantidade de diretores é igual à quantidade de segmentos desenhados, ou seja, o número de diretores é $\binom{6}{2} = 15$.

(b) Há um total de $\binom{15}{2} = 105$ maneiras de escolher dois diretores. Dentre essas, vamos contar em quantas os dois diretores participam de uma mesma comissão. Usando a figura acima, veja que cada comissão possui exatamente 5 diretores (pois do ponto que a representa partem 5 segmentos). Assim, em cada uma das seis comissões existem $\binom{5}{2} = 10$ pares de diretores que pertencem a ela. Mas, como há 6 comissões, concluímos que há exatamente $6 \cdot 10 = 60$ pares de diretores que pertencem a uma mesma comissão. Observe que, ao realizar essa contagem, nenhum par de diretores é contabilizado mais de uma vez, pois (pela figura) quaisquer dois diretores participam de no máximo uma mesma comissão (dois segmentos distintos possuem no máximo uma extremidade em comum). Assim, a probabilidade desejada é:

$$\frac{60}{105} = \frac{4}{7}.$$

Como solução alternativa ao item (b), vamos selecionar os dois diretores, um por vez. Veja que, pela simetria do problema, todos os diretores desempenham um mesmo papel. (Inclusive, do ponto de vista combinatório, não há diferença entre um diretor cujo nome está escrito em um lado do hexágono e um diretor cujo nome está escrito em uma diagonal). Desse modo, para calcular a probabilidade requisitada, podemos fixar um diretor qualquer e calcular a probabilidade do segundo diretor estar em uma mesma comissão que ele. Sem perda da generalidade, considere o diretor "Fulano", cujo nome está escrito no segmento C_1C_2. Dentre os demais 14 diretores, aqueles que pertencem a uma mesma comissão que Fulano são os que possuem seus nomes escritos em um segmento diferente de C_1C_2 mas que tem uma extremidade em C_1 ou em C_2. Há 8 segmentos desse tipo (4 que partem de C_1 e 4 que partem de C_2). Assim, a probabilidade desejada é

$$\frac{8}{14} = \frac{4}{7}. \qquad \square$$

Dicas para o Professor

Este módulo complementa os módulos anteriores sobre probabilidade, trazendo exercícios de aprofundamento e um novo tema, que não havia sido abordado anteriormente: o cálculo de probabilidades geométricas.

Há alguns detalhes (importantes) nas soluções desses exercícios que preferimos escrever como "observações". Elas não são necessários para as soluções em si, mas, quando ignorados completamente, podem produzir soluções erradas. Em materiais seguintes, iremos abordar erros comuns em problemas de probabilidade, assim como fizemos na aula "Professor, onde foi que eu errei? " do módulo "Aplicações das Técnicas Desenvolvidas" sobre contagem.

Surgerimos que este material seja apresentado em dois ou três encontros de 50 minutos, dependendo da profundidade em que o professor deseje discutir os temas e apresentar ou não todas as observações.

Sugestões de Leitura Complementar

1. P. C. P. Carvalho, A. C. de O. Morgado, P. Fernandez e J. B. Pitombeira. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 2000.