Material Teórico - Módulo Funções Trigonométricas

Seno, Cosseno e Tangente
Parte 4

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

20 de setembro de 2024

Neste material, continuaremos a deduzir fórmulas que permitem calcular o valor de funções trigonométricas de alguns arcos em função dos valores dessas mesmas funções em arcos cujos valores já são conhecidos. Mais precisamente, deduziremos fórmulas que permitem calcular o valor das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente em $\frac{a}{2}$, desde que sejam conhecidos os valores dessas funções em a. Além disso, também deduziremos fórmulas que permitem calcular seno, cosseno e tangente de a em função do valor da tangente em $\frac{a}{2}$.

Iniciamos listando as fórmulas que foram deduzidas até agora, para facilitar a dedução das novas fórmulas, bem como a resolução dos exemplos que apresentaremos adiante.

- Cosseno da soma:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{1}$$

- Cosseno da diferença:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{2}$$

- Seno da soma:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \tag{3}$$

- Seno da diferença:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \tag{4}$$

- Tangente da soma:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{5}$$

- Tangente da diferença:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{6}$$

- Cosseno do arco duplo:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a, \tag{7}$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1, \tag{8}$$

$$\cos(2a) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a. \tag{9}$$

- Seno do arco duplo:

$$\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cos a. \tag{10}$$

- Tangente do arco duplo:

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \tag{11}$$

- Cosseno do arco triplo:

$$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a. \tag{12}$$

- Seno do arco triplo:

$$\operatorname{sen}(3a) = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a. \tag{13}$$

- Tangente do arco triplo:

$$\operatorname{tg}(3a) = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}. \tag{14}$$

Funções trigonométricas de $\frac{a}{2}$

Utilizando a fórmula (8), podemos escrever

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right)\\ &= 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1.\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2},$$

ou seja,

$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}. \tag{15}$$

Se utilizarmos a fórmula (9) em vez de (8), temos que

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos\left(2\cdot\frac{a}{2}\right) \\ &= 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right), \end{aligned}$$

o que implica

$$\text{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{2}.$$

Assim, concluímos que

$$\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \tag{16}$$

Se $\frac{a}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos dividir membro a membro as identidades (16) e (15) para obter

$$\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}. \tag{17}$$

Observação 1. *Note que, além de saber o valor de* $\cos a$*, precisamos saber o sinal de* $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$*,* $\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)$ *e* $\text{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$ *para determinar esses valores utilizando as fórmulas acima. De fato, fazendo* $b = a + 2k\pi$*, temos que* $\cos b = \cos a$ *e*

$$\cos\left(\frac{b}{2}\right) = \cos\left(\frac{a}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{a}{2}\right), & \textit{se } k \textit{ for par} \\ -\cos\left(\frac{a}{2}\right), & \textit{se } k \textit{ for ímpar} \end{cases}.$$

Isso mostra que saber apenas o valor de $\cos a$ *não é suficiente para determinar o valor das funções trigonométricas em* $\frac{a}{2}$*.*

Seno, cosseno e tangente de a em função de tangente de $\dfrac{a}{2}$

Suponha que $\cos x \neq 0$. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 &\Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&\Longrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&\Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a fórmula (10), obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos^2 x \\
&= 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\
&= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.
\end{aligned}$$

Fazendo $a = 2x$, de modo que $x = \frac{a}{2}$, chegamos a

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}. \tag{18}$$

Por outro lado, utilizando a fórmula (11), obtemos

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}. \tag{19}$$

Finalmente, dividindo membro a membro as identidades (18) e (19), concluímos que

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{a}{2}\right)}. \tag{20}$$

Exemplos

Colecionamos, nesta subseção, algumas aplicações das fórmulas deduzidas anteriormente.

Exemplo 2. *Calcule o seno, o cosseno e a tangente de* $\frac{\pi}{8}$.

Solução. Temos que $\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}$; portanto, utilizando as fórmulas (15), (16) e (17), obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}\\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}\\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}\\ &= \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}-1.\end{aligned}$$

□

Exemplo 3 (FUVEST). *Se* $\operatorname{tg}\theta = 2$, *assinale a alternativa que corresponde ao valor de* $\frac{\cos(2\theta)}{1+\operatorname{sen}(2\theta)}$.

(a) -3.

(b) $-\dfrac{1}{3}$.

(c) $\dfrac{1}{3}$.

(d) $\dfrac{2}{3}$.

(e) $\dfrac{3}{4}$.

Solução. Utilizando as fórmulas (18) e (20), obtemos, respectivamente,

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{2\cdot 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}$$

e

$$\cos(2\theta) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1-2^2}{1+2^2} = -\frac{3}{5}.$$

Daí, segue que

$$\frac{\cos(2\theta)}{1+\operatorname{sen}(2\theta)} = \frac{-\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra (b). □

Exemplo 4. *Encontre o valor de* $\cos 36°$.

Solução. Inicialmente, note que $5\cdot 18° = 90°$. Além disso, combinando as fórmulas (1), (8) e (10), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\cos(5a) &= \cos(4a+a)\\
&= \cos(4a)\cos a - \operatorname{sen}(4a)\operatorname{sen} a\\
&= \cos(2\cdot 2a)\cos a - \operatorname{sen}(2\cdot 2a)\operatorname{sen} a\\
&= \big(2\cos^2(2a)-1\big)\cos a - 2\operatorname{sen}(2a)\cos(2a)\operatorname{sen} a\\
&= \Big(2\left(2\cos^2 a - 1\right)^2 - 1\Big)\cos a\\
&\quad - 2\cdot 2\operatorname{sen} a\cos a\left(2\cos^2 a - 1\right)\operatorname{sen} a
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\cos(5a) &= \left(2\left(4\cos^4 a - 4\cos^2 a + 1\right) - 1\right)\cos a \\
&\quad - 4\operatorname{sen}^2 a \cos a \left(2\cos^2 a - 1\right) \\
&= \left(8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 2 - 1\right)\cos a \\
&\quad - 4\left(1 - \cos^2 a\right)\cos a \left(2\cos^2 a - 1\right) \\
&= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a \\
&\quad + 4\cos a\left(2\cos^4 a - 3\cos^2 a + 1\right) \\
&= 8\cos^5 a - 8\cos^3 a + \cos a \\
&\quad + 8\cos^5 a - 12\cos^3 a + 4\cos a \\
&= 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\cos(5a) = 16\cos^5 a - 20\cos^3 a + 5\cos a.$$

Fazendo $a = 18^\circ$ na fórmula acima, obtemos

$$0 = \cos 90^\circ = 16\cos^5 18^\circ - 20\cos^3 18^\circ + 5\cos 18^\circ.$$

Agora, fazendo a substituição $y = \cos 18^\circ$, a última equação acima pode ser reescrita do seguinte modo:

$$16y^5 - 20y^3 + 5y = 0.$$

Mas veja que

$$16y^5 - 20y^3 + 5y = y\left(16y^4 - 20y^2 + 5\right)$$

e, como $\cos 18^\circ \neq 0$, temos que $y = \cos 18^\circ$ é raiz da equação

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0.$$

Essa equação é biquadrada, de sorte que, fazendo $z = y^2$, obtemos

$$16z^2 - 20z + 5 = 0,$$

logo,

$$\begin{aligned} z &= \frac{20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 16 \cdot 5}}{2 \cdot 16} = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{32} \\ &= \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{16}. \end{aligned}$$

Note, agora, que $\cos 18° > \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ implica

$$z = \cos^2 18° > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Não é difícil verificar que

$$\frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} < \frac{3}{4},$$

portanto,

$$z = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}.$$

Finalmente, invocando a fórmula (8), obtemos

$$\begin{aligned} \cos 36° &= \cos(2 \cdot 18°) \\ &= 2\cos^2 18° - 1 \\ &= 2z - 1 \\ &= 2\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}\right) - 1 \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}. \end{aligned}$$

□

Observação 5. *O exemplo anterior foi tirado da referência* [1] (*veja o problema* 17 *da seção* 7.2) *e dá uma maneira de calcular o lado do decágono regular inscrito em um círculo de raio R alternativa à abordagem usual* (*que se apóia no*

Exemplo 4.6 de [1]). Realmente, sendo O o centro do círculo e A e B dois vértices consecutivos do decágono, temos $AO = BO = R$ e $A\widehat{O}B = 36°$. Portanto, AB pode ser calculado com o auxílio da lei dos cossenos, dando

$$\begin{aligned} AB^2 &= R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 36° \\ &= 2R^2(1 - \cos 36°) \\ &= 2R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) \\ &= R^2 \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right), \end{aligned}$$

de modo que

$$AB = R \cdot \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas duas sessões de 50min para expor o conteúdo deste material. É fundamental que os alunos se habituem a utilizar as fórmulas apresentadas aqui reunidas, pois a familiaridade com as mesmas será importante para resolver problemas mais complexos que surgirão à frente. Além disso, essas fórmulas também serão utilizadas para deduzir outras fórmulas, as quais serão apresentadas nos próximos materiais. Para atingir esse objetivo, sugerimos que sejam apresentados outros exemplos, até que os alunos utilizem tais fórmulas com desenvoltura. Uma boa fonte para tais exemplos adicionais é a referência [2].

Sugestões de Leitura Complementar

1 A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Plana*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM, 2023.

2 G. Iezzi. *Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria*, nona edição. São Paulo, Atual Editora, 2013.