Material Teórico - Módulo: Funções - Noções Básicas

Noções Básicas - Parte 3

Nono Ano - Fundamental

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

7 de Janeiro de 2025

1 Função real de variável real

Recorde que uma função $f : A \to B$ é denominada uma *função real de variável real*, se o seu domínio A e seu contradomínio B forem ambos formados por números reais.

Tais funções que têm grande importância, tanto em Matemática quanto em aplicações, e, nesta terceira parte, estudaremos uma maneira *geométrica* bastante eficiente de representá-las. Para tanto, precisamos de algumas definições preliminares.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, o par (a, b) é chamado **par ordenado**. A principal diferença entre o par ordenado (a, b) e o conjunto $\{a, b\}$ é que, enquanto para conjuntos ocorre $\{a, b\} = \{b, a\}$, para pares ordenados temos $(a, b) \neq (b, a)$ se $a \neq b$. Mais precisamente, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se, *por definição*, que

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ e } b = d. \tag{1}$$

Assim, em um par ordenado, a *ordem* em que os elementos aparecem é relevante.

Exemplo 1. *Os pares ordenados $(x + y, 1)$ e $(3, x - y)$ são iguais. Calcule x e y.*

Solução. Para que $(x + y, 1) = (3, x - y)$, devemos ter $x + y = 3$ e $x - y = 1$. Resolvendo esse sistema de equações, encontramos $x = 2$ e $y = 1$. □

O **produto cartesiano**[1] dos conjuntos A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), com $a \in A$ e $b \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}. \tag{2}$$

Exemplo 2. *Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, então*

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d),$$

$$(3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}.$$

[1] O nome "cartesiano" vem de *Cartesius*, que é uma forma latinizada do sobrenome do matemático e filósofo francês René Descartes (1596-1650), pioneiro no estudo do que chamamos hoje de Geometria Analítica.

Nem sempre é possível listar todos os elementos de um produto cartesiano, e o exemplo a seguir ilustra uma situação dessas. Para seu enunciado, recorde que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, definimos o **intervalo fechado $[a, b]$**, de **extremidades** a e b, por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Assim, por exemplo, o intervalo fechado $[2, 3]$ é o conjunto dos números reais x *de* 2 *a* 3, isto é, tais que $2 \leq x \leq 3$. Da mesma forma, $[2, 2] = \{2\}$, uma vez que 2 é o único real x tal que $2 \leq x \leq 2$. O nome *fechado* refere-se ao fato de que $[a, b]$ contém suas extremidades a e b. Veja que, em qualquer caso, $[a, b]$ é um subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Exemplo 3. *Pela definição de produto cartesiano, temos*

$$[1, 2] \times [0, 1] = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \ e\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Assim, o produto cartesiano $[1, 2] \times [0, 1]$ *é um conjunto infinito de pares ordenados.*

A essa altura, você deve estar acostumado com o fato de que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais pode ser identificado com os pontos de uma reta. Recordando rapidamente, tal identificação é feita pela escolha de um ponto da reta para representar o número 0, uma semirreta (das que começam em 0) para conter os números positivos e um segmento de reta cujo comprimento representará uma unidade. Uma vez feita a identificação acima, usaremos os números reais para denominar os pontos de uma reta numérica. Por exemplo, escrevemos "ponto 3" para nos referirmos ao ponto da reta associado ao número 3. Uma reta cujos pontos estão identificados com os números reais é chamada **reta numérica**, **reta real** ou **eixo real**.

O produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pode ser identificado com o conjunto dos pontos de um plano, através da construção que faremos a seguir.

Considere dois eixos reais X e Y, perpendiculares, tais que seu ponto de interseção $O \in X \cap Y$ seja o ponto 0 em ambos (veja a Figura 1). Suponha, adicionalmente, que o comprimento do segmento que liga os pontos 0 e 1 seja o mesmo nos dois eixos. Isso equivale a assumir que os dois eixos estão *na mesma escala*.

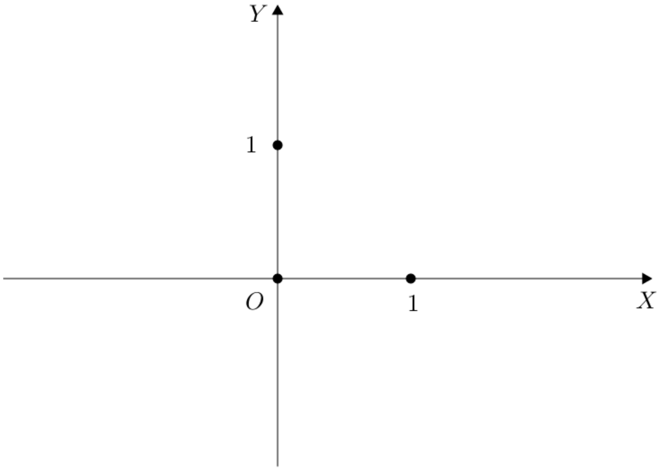

Figura 1: sistema cartesiano de eixos no plano.

Convenciona-se posicionar as retas reais X e Y de modo que X fique na horizontal e Y na vertical. Além disso, supõe-se, também por convenção, que X esteja orientado da esquerda para a direita e Y de baixo para cima. Isso quer dizer que, em X, o ponto 1 está à direita do ponto 0 e, em Y, o ponto 1 está acima do ponto 0.

Consideremos, agora, um ponto P desse plano. Tracemos, pelo ponto P as retas paralelas aos dois eixos. A reta que passa por P e é paralela ao eixo Y intersecta o eixo X no ponto P' e a reta que passa por P e é paralela ao eixo X intersecta o eixo Y no ponto P'' (veja a Figura 2).

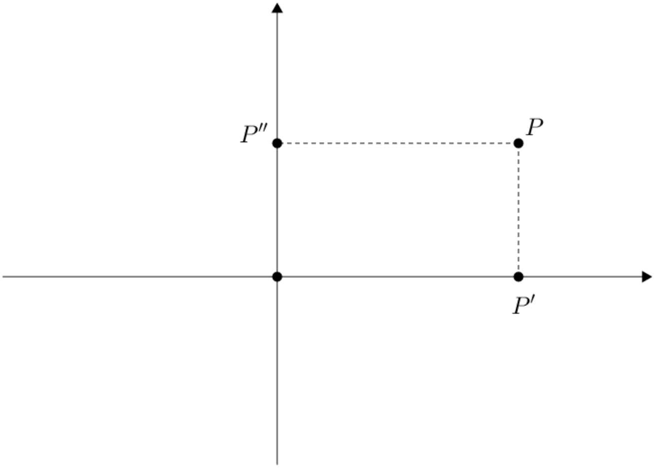

Figura 2: determinação das coordenadas do ponto P.

Seja x o número real correspondente ao ponto P' e seja y o número real correspondente ao ponto P'' (na Figura 2, x e y são positivos). Obtemos, assim, um par ordenado (x, y) de números reais associado ao ponto P. Observe que o *axioma das paralelas* garante que a reta paralela a Y passando por P é única; logo, o ponto P' e o número real x são determinados de modo único pelo ponto P. Da mesma forma, o axioma das paralelas também garante que P'' e y dependem apenas de P. Assim, o par ordenado (x, y) associado ao ponto P é único.

Reciprocamente, dado um par ordenado (x, y) de números reais, a reta r, paralela ao eixo Y e passando por x, intersecta a reta s, paralela ao eixo X e passando por y. Além disso, o ponto de interseção das retas r e s é exatamente o ponto P que, pela construção anterior, gera o par ordenado (x, y).

Em resumo, a construção acima permite identificar o ponto P com o par ordenado (x, y), em cujo caso escrevemos $P(x, y)$ ou $P = (x, y)$.

Uma vez feito isso, o plano das retas $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OY}$, identificado com o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, é chamado **plano cartesiano**[2] e denotado simplesmente por XOY.

O eixo X é também chamado **eixo das abscissas**, ao passo que o eixo Y é chamado **eixo das ordenadas**. Assim, se $P = (x, y)$, dizemos que x é a **abscissa de $\boldsymbol{P}$** e y é a **ordenada de $\boldsymbol{P}$**.

A próxima figura exemplifica a marcação dos pontos $A = (-3, 2)$, $B = (2, 1)$, $C = (-4, -3/4)$ e $D = (1, -\sqrt{2})$ em um plano cartesiano XOY.

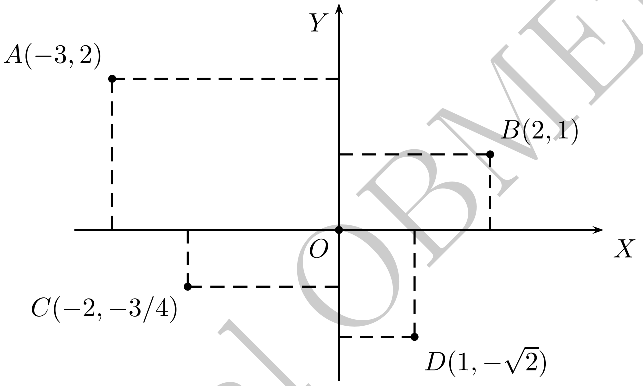

Figura 3: alguns pontos do plano cartesiano XOY.

A discussão acima estabeleceu uma correspondência bijetiva entre pontos do plano e pares ordenados de números reais. Essa correspondência permite associar *objetos algébricos*, como pares ordenados e equações, a *objetos geométricos*, como pontos e curvas. Essa é a ideia básica de um método, chamado *Geometria Analítica*, criado pelo matemático francês Pierre de Fermat (1601-1665) e desenvolvido e popularizado por Descartes.

Os eixos X e Y dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes** (veja a Figura 4). O primeiro quadrante

[2] Em homenagem a Descartes (veja a nota de rodapé anterior).

corresponde aos pontos (x, y) com ambas as coordenadas positivas: $x > 0$ e $y > 0$. O segundo quadrante corresponde aos pontos com abscissa negativa e ordenada positiva: $x < 0$ e $y > 0$. O terceiro quadrante corresponde aos pontos com abscissa e ordenada negativas: $x < 0$ e $y < 0$. Finalmente, o quarto quadrante é o conjunto dos pontos que têm abscissa positiva e ordenada negativa: $x > 0$ e $y < 0$.

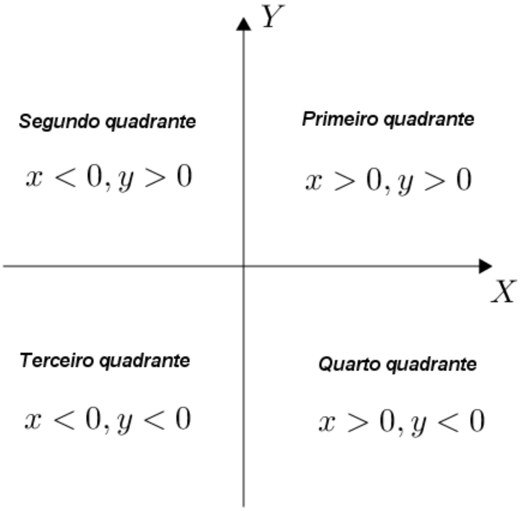

Figura 4: os quatro quadrantes de um plano cartesiano.

Os pontos que têm abscissa nula, isto é, os pontos do tipo $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são exatamente os pontos do eixo Y. Já os pontos que têm ordenada nula, $(x, 0)$, com $x \in \mathbb{R}$, formam o eixo X. Assim, podemos escrever:

$$X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ e } Y = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Consideremos, agora, uma função $f : A \to B$. Para cada $a \in A$, existe um único $f(a) \in B$, logo, existe um único par ordenado $(a, f(a)) \in A \times B$. O conjunto de todos os pares ordenados desse tipo é o **gráfico** da função f. Usando a notação $\mathrm{Graf}(f)$ para designar o gráfico de f, temos

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}. \tag{3}$$

Se $f : A \to B$ for uma função real de variável real, isto é, se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, então $A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; então, identificando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com um plano cartesiano, temos que $A \times B$ é um subconjunto desse plano. Em resumo, procedendo dessa forma, podemos representar o gráfico da função f *geometricamente*, como um subconjunto do plano cartesiano.

Vejamos alguns exemplos simples.

Exemplo 4. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função constante e igual a b. O gráfico de f é o conjunto*

$$\begin{aligned}\mathrm{Graf}(f) &= \{(x, y);\ x \in \mathbb{R} \ e\ y = f(x)\}\\ &= \{(x, y);\ x \in \mathbb{R} \ e\ y = b\}\\ &= \{(x, b);\ x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Assim, o gráfico de f é a reta paralela ao eixo das abscissas e passando pelo ponto $(0, b)$ do eixo das ordenadas, conforme mostrado na Figura 5.

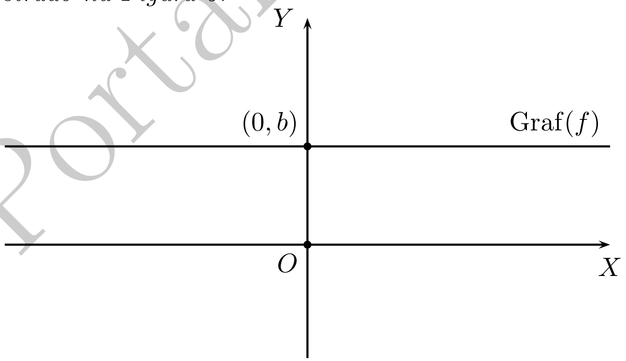

Figura 5: gráfico da função constante $f(x) = b, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Para o próximo exemplo, dados números reais $a < b$, recorde que o intevalo $[a, b)$ é definido por

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}.$$

Exemplo 5. *Recorde que a função parte inteira, $\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$\lfloor x \rfloor = \textit{maior inteiro menor ou igual a } x.$$

Assim, para $x \in [n, n+1)$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos $\lfloor x \rfloor = n$, logo, $(x, \lfloor x \rfloor) = (x, n)$. Dessa forma, a porção do gráfico da função parte inteira, quando x varia no intervalo $[n, n+1)$, corresponde ao segmento horizontal que vai do ponto (n, n) (inclusive) ao ponto $(n+1, n)$ (exclusive). Fazendo n variar em $\mathbb{Z}$, temos o gráfico de $\lfloor\ \rfloor$ como a união desses infinitos segmentos horizontais.

A figura a seguir exibe uma parte desse gráfico, correspondente às abscissas $x \in [-2, 3)$ e formada pela união dos segmentos horizontais destacados.

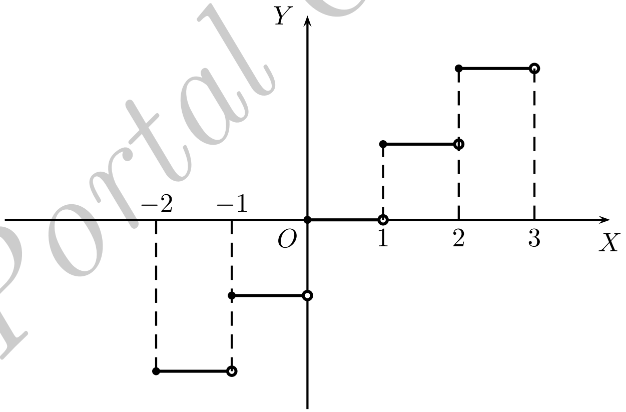

Figura 6: gráfico da função parte inteira.

Exemplo 6. *O gráfico da função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por* $f(x) = 2x + 1$*, é a reta determinada pelos pontos* $(0, 1)$ *e* $(1, 3)$*.*

Para verificar essa afirmação, precisamos mostrar que um ponto (x, y) *pertence ao gráfico de* f *se, e somente se, pertence à reta que passa pelos pontos* $(0, 1)$ *e* $(1, 3)$*. Sejam, pois,* A *o ponto* $(1, 0)$*,* C *o ponto* $(0, 3)$ *e* E *o ponto* $(0, 1)$ *(veja a Figura 7).*

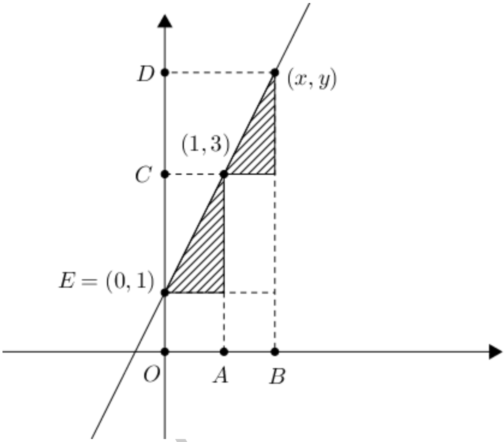

Figura 7: o gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$.

Primeiramente, tomemos um ponto (x, y) *sobre o gráfico de* f*. Então,* $(x, y) = (x, f(x))$*, isto é,* $y = f(x) = 2x+1$*. Se* $B = (x, 0)$ *e* $D = (0, y)$*, então (veja novamente a Figura 7)* $\overline{AB} = x - 1$ *e* $\overline{CD} = y - 3 = 2x + 1 - 3 = 2x - 2 = 2(x - 1)$*. Assim,* $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$*.*

Por outro lado, ainda na Figura 7, $\overline{OA} = 1 - 0 = 1$ *e* $\overline{EC} = 3 - 1 = 2$*. Assim,* $\frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{2}{1} = 2$*. Portanto,*

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OA}}$$

e, como os triângulos tracejados na Figura 7 são retângulos, concluímos que eles são semelhantes, pelo caso LAL de semelhança de triângulos. Em particular, as hipotenusas desses triângulos retângulos formam ângulos iguais com a horizontal. Por sua vez, isso significa que os pontos (x, y), $(1, 3)$ *e* $(0, 1)$ *são colineares, ou seja, que* (x, y) *pertence à reta que passa por* $(0, 1)$ *e* $(1, 3)$.

Reciprocamente, se o ponto (x, y) *pertencer à reta determinada pelos pontos* $(0, 1)$ *e* $(1, 3)$, *então os triângulos tracejados na Figura 7 são semelhantes, pois seus ângulos agudos, sendo correspondentes, são congruentes. Dessa forma, os catetos desses dois triângulos são proporcionais, ou seja,*

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OA}} = \frac{3-1}{1-0} = 2.$$

Da igualdade acima, segue que $y - 3 = 2x - 2$, *ou seja,* $y = 2x + 1$. *Portanto o ponto* (x, y) *é da forma* $(x, 2x + 1) = (x, f(x))$ *e, por isso, pertence ao gráfico de* f.

No módulo sobre funções afins, veremos que o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com a e b constantes, é sempre uma reta. O caso $a = 0$ (isto é, aquele em que $f(x) = b$ para todo x) foi examinado no Exemplo 4. Por outro lado, a ideia para estabelecer o caso geral é a mesma que usamos no exemplo anterior.

Exemplo 7. *O gráfico da sequência* $f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ *e* $f(3) = 5$ *é o subconjunto* $\mathrm{Graf}(f)$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *formado pelos pares ordenados* $(x, f(x))$, *com* $x \in \{1, 2, 3\}$. *Assim,*

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5)\}.$$

Dicas para o Professor

São necessários pelo menos dois encontros de 50 minutos cada para cobrir o material desta aula. O assunto é suficientemente importante para que sejam dedicados a ele tempo e cuidado maiores.

Se o professor achou que a apresentação do conceito de par ordenado foi um tanto vaga, está correto. A definição rigorosa, devida ao matemático polonês K. Kuratowski, é simples, mas pode parecer, aos olhos dos estudantes, um tanto pedante ou artificial:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}. \tag{4}$$

Assim, recomendamos ao professor assumir a validade da propriedade fundamental (1) sem maiores comentários, observando, contudo, que ela decorre facilmente da definição acima (veja, por exemplo, o problema 5 da seção 1.1 da referência [2]).

Ressaltamos, ainda, que, do ponto de vista dos fundamentos da Matemática, definir par ordenado por meio de (4) não é um mero preciosismo. Realmente, de um ponto de vista rigoroso, uma função de A em B é uma *relação* de A em B, isto é, um subconjunto F do produto cartesiano $A \times B$ satisfazendo as duas condições a seguir:

(i) Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in F$.

(ii) Se $a \in A$ e $b_1, b_2 \in B$ forem tais que $(a, b_1) \in F$ e $(a, b_2) \in F$, então $b_1 = b_2$.

Assim, a definição rigorosa de função utiliza o conceito de par ordenado, de forma que não se pode definir o par ordenado (a, b) como uma sequência na qual a é o primeiro termo e b é o segundo (isso porque uma sequência é uma função; então, se definíssemos par ordenado dessa forma, teríamos um *raciocínio circular*.

A demonstração de que o gráfico da função afim dada por $f(x) = 2x + 1$ é uma reta deve ser trabalhada com bastante cuidado, enfatizando os aspectos geométricos (semelhança de triângulos). A semelhança também é chamada de *afinidade*, o que motiva a escolha do nome *afim* para as funções com lei de formação do tipo $f(x) = ax + b$. A propósito, a análise do gráfico da função afim particular dada por $f(x) = 2x + 1$ ajudará os alunos a compreenderem o caso geral, mais adiante.

Conforme já observamos nas "Dicas ao Professor" das partes I e II, os capítulos 1 e 2 da referência [1], juntamente com as referências [3] e [4], contém muito mais sobre funções do que tratamos aqui. Sugerimos ao leitor consultar essas fontes como seguimento natural a estas notas.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 3: Introdução à Análise*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 2022.
2. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 2024.
3. G. Iezzi. *Elementos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais e Funções*. Atual Editora, São Paulo, 2013.
4. E. L. Lima et al. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, Editora S. B. M., Rio de Janeiro, 1998. 2012.