Material Teórico - Módulo Métodos de Contagem e Probabilidade

Alguns Problemas de Contagem

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

15 de Março de 2024

Portal da Matemática
OBMEP

Neste material, ilustramos os métodos básicos de contagem discutidos na apostila do PIC resolvendo alguns problemas mais difíceis, mas muito interessantes. Começamos ilustrando técnicas usuais de contagem, tais como combinações, arranjos e desconto de casos repetidos.

Exemplo 1. *Considere um polígono convexo de n lados e suponha que não haja duas de suas diagonais que sejam paralelas, nem três que concorram em um mesmo ponto que não seja vértice do polígono.*

(a) *Quantos são os pontos de interseção dessas diagonais?*

(b) *Quantos desses pontos de interseção são interiores ao polígono?*

(c) *Quantos são exteriores?*

Solução.
(a) Um polígono convexo de n lados tem $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonais. Para calcular os pontos de interseção de dessas diagonais, note que há $\binom{d_n}{2}$ modos de escolhermos duas delas; portanto, $\binom{d_n}{2}$ *seria* o número de pontos de interseção. *Seria* porque, nessa contagem, cada vértice do polígono foi contado várias vezes.

Realmente, sendo $A_1A_2\ldots A_n$ o polígono (acompanhe na figura a seguir), o vértice A_1 foi contado tantas vezes quantas

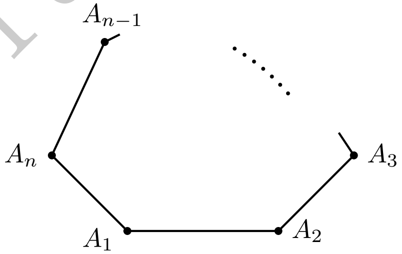

Figura 1: um n-ágono convexo.

sejam as maneiras de escolhermos duas diagonais passando por A_1. Como há $n-3$ diagonais passando por A_1, há $\binom{n-3}{2}$ modos de escolher duas delas; logo, A_1 foi contado $\binom{n-3}{2}$ vezes, e não 1 vez. Então, temos de descontar $\binom{n-3}{2}-1$ ocorrências repetidas de A_1, o mesmo valendo para todos os n vértices.

Portanto, o número de pontos de interseção das diagonais é

$$\binom{d_n}{2} - n\left(\binom{n-3}{2} - 1\right).$$

Chamando esse número de m, temos

$$\begin{aligned}
m &= \frac{d_n(d_n-1)}{2} - n\left(\frac{(n-3)(n-4)}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-3)}{2}\left(\frac{n(n-3)}{2} - 1\right) - n\left(\frac{n^2-7n+12}{2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot n(n-3)\left(\frac{n^2-3n}{2} - 1\right) - n\left(\frac{n^2-7n+10}{2}\right) \\
&= \frac{n}{8}\left((n-3)(n^2-3n-2) - 4(n^2-7n+10)\right) \\
&= \frac{n}{8}\left(n^3 - 10n^2 + 35n - 34\right).
\end{aligned}$$

(b) Se P for o ponto de interseção das diagonais AC e BD e P estiver no interior do polígono, então $ABCD$ será um quadrilátero convexo cujos vértices são vértices do polígono (faça uma figura para acompanhar).

Reciprocamente, se $ABCD$ for um quadrilátero convexo cujos vértices são vértices do polígono, então AC e BD são diagonais do polígono que intersectam-se num ponto P situado no interior do mesmo.

Portanto, o número de pontos de interseção de diagonais situados no interior do polígono é igual ao número de quadriláteros convexos com vértices em quatro vértices do polígono; por sua vez, tal número é igual ao número de modos de escolher os quatro vértices, ou seja, $\binom{n}{4}$.

(c) O número de pontos de interseção situados no exterior do polígono é a diferença entre a quantidade total de pontos de interseção (calculada em (a)) e a soma da quantidade n de vértices com a quantidade de pontos de interseção situados no exterior (calculada em (b)):

$$\frac{n}{8}\left(n^3 - 10n^2 + 35n - 34\right) - \left(n + \binom{n}{4}\right).$$

$\square$

Exemplo 2. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$, seja $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Faça os seguintes itens:*

(*a*) *Para $1 \leq j \leq n$, prove que há exatamente $(n - j + 1)^k - (n-j)^k$ sequências formadas por k elementos de I_n (possivelmente com repetições), tais que o menor termo da sequência é igual a j.*

(*b*) *Prove que a soma dos termos mínimos de todas as n^k sequências de k elementos do conjunto I_n (possivelmente com repetições) é igual a $1^k + 2^k + \ldots + n^k$.*

Prova.
(a) Primeiramente, note que se o elemento mínimo de um certa k-upla[1] $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ for j, então os a_i terão de ser escolhidos do conjunto $\{j, j+1, \ldots, n\}$, num total de $n-j+1$ possibilidades para cada a_i. Dessa forma, o número de k-uplas com elemento mínimo igual a j é exatamente $(n - j + 1)^k$, certo? Errado! O que contamos foi o número de k-uplas com elemento mínimo *maior ou igual* a j, já que, quando fazemos as escolhas dos valores de cada a_i, podemos não escolher j como valor de nenhum deles.

Analogamente ao feito acima, vemos que o número de k-uplas cujo elemento mínimo é maior ou igual que $j + 1$ é exatamente $(n - (j + 1) + 1)^k = (n - j)^k$. Como o elemento mínimo de uma $k-$upla é igual a j se, e só se, for maior ou igual a j e não for maior ou igual a $j + 1$, segue

[1] Abreviamos por *k-upla* uma sequência de k elementos.

que o número de k-uplas com elemento mínimo j é igual a $(n-j+1)^k-(n-j)^k$.

(b) Cada uma das k-uplas contadas em (a) contribui para a soma dos elementos mínimos com

$$j\cdot[(n-j+1)^k-(n-j)^k],$$

de modo que a soma dos elementos mínimos é igual a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} j\cdot[(n-j+1)^k-(n-j)^k]=\\
&=\sum_{j=1}^{n} j(n-j+1)^k-\sum_{j=1}^{n} j(n-j)^k\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)^k-\sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)^k\\
&=n^k+\sum_{j=1}^{n-1}[(\cancel{j}+1)(n-j)^k-\cancel{j(n-j)^k}]\\
&=n^k+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)^k\\
&=n^k+(n-1)^k+\ldots+1^k.
\end{aligned}$$

□

No próximo exemplo, é importante observar que a grande dificuldade reside em encontrar uma estratégia adequada, tanto para realizar a contagem quanto para evitar contagens repetidas.

Exemplo 3. *Sejam $n>1$ um natural ímpar e $A_1A_2\ldots A_n$ um polígono regular de n lados. Prove que há exatamente $\frac{1}{4}\binom{n+1}{3}$ triângulos $A_iA_jA_k$ acutângulos.*

Prova. Comece notando que há, ao todo, exatamente $\binom{n}{3}$ triângulos $A_iA_jA_k$ (pois esse é o número de modos de escolhermos três dos n vértices do polígono).

Agora, seja Γ o círculo circunscrito ao polígono. Como n é ímpar, nenhuma diagonal A_iA_j pode ser um diâmetro de Γ. Portanto, cada triângulo $A_iA_jA_k$ é acutângulo ou obtusângulo. Assim, calcularemos o número de triângulos acutângulos $A_iA_jA_k$ descontando, do total $\binom{n}{3}$ de triângulos $A_iA_jA_k$, o número de triângulos $A_iA_jA_k$ obtusângulos.

Afirmamos inicialmente que, se houver m triângulos obtusângulos $A_1A_jA_k$, com $j < k$, então o total de triângulos $A_iA_jA_k$ obtusângulos será nm.

Para ver isso, denote $A_{n+1} = A_1$, $A_{n+2} = A_2$, $\ldots$, $A_{2n} = A_n$ e perceba que, a partir de um triângulo obtusângulo $A_1A_jA_k$, com $1 < j < k \leq n$, geramos o conjunto de n triângulos obtusângulos congruentes $A_1A_jA_k$, $A_2A_{j+1}A_{k+1}$, $A_3A_{j+2}A_{k+2}$, $\ldots$, $A_nA_{j+n-1}A_{k+n-1}$, os quais são dois a dois distintos. O caso $n = 7$, partindo de A_1, é mostrado na figura a seguir:

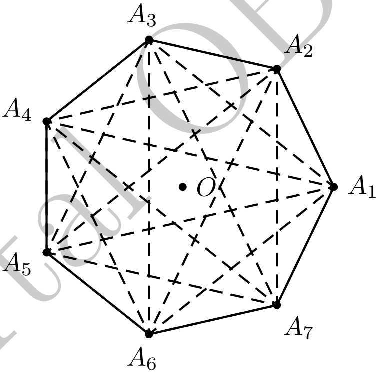

Figura 2: $A_1A_3A_4$, $A_2A_5A_6$, $\ldots$, $A_7A_2A_3$ são obtusângulos.

Reciprocamente, o triângulo obtusângulo $A_iA_jA_k$, com $1 \leq i < j < k \leq n$, aparece no conjunto dos n triângulos obtusângulos congruentes gerados a partir de $A_1A_{j-i+1}A_{k-i+1}$.

Para o que falta, suponha que, num triângulo $A_1A_jA_k$ obtusângulo, A_1A_k seja o maior lado. Então, sobre o arco menor $\overset{\frown}{A_1A_k}$ há $k-1$ vértices do polígono, os quais correspondem às possíveis escolhas para A_j. Como $2 \leq k \leq n-1$, concluímos que

$$m = 1 + 2 + \ldots + \frac{n-3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right).$$

Ent ao, a quantidade de triângulos que queremos contar é

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{3} - n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{6}\, n(n-1)(n-2) - \frac{1}{8}\, n(n-1)(n-3) \\
&= \frac{1}{2}\, n(n-1)\left(\frac{n-2}{3} - \frac{n-3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\, n(n-1) \cdot \frac{(n+1)}{12} \\
&= \frac{1}{4}\binom{n+1}{3}.
\end{aligned}$$

□

O próximo exemplo traz uma bela aplicação de combinações simples, devida ao matemático americano Irving Kaplansky e conhecida como o **primeiro lema de Kaplansky**.

Exemplo 4 (Kaplansky). *Dados $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2k-1$, mostre que o número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com k elementos, dois quaisquer não consecutivos, é igual a $\binom{n-k+1}{k}$.*

Antes de passar à demonstração, observe que se $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ for um subconjunto com k elementos, dois quaisquer não consecutivos, então $n \geq 2k-1$, posto que entre dois dos k elementos de A há pelo menos um elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não pertence a A, o que totaliza pelo menos $k + (k-1) = 2k-1$ elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Portanto, a exigência de que $n \geq 2k-1$, feita no enunciado, é natural e garante que $n-k+1 \geq k$, de sorte que o número binomial $\binom{n-k+1}{k}$ está bem definido.

Prova. Comecemos notando que existe uma *correspondência biunívoca* entre os subconjuntos que queremos contar e as sequências de n termos, sendo k deles iguais a 1 e $n-k$ iguais a 0, e tal que dois quaisquer dos 1's são não consecutivos. Por exemplo, se $n = 10$ e $k = 3$, um dos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ que desejamos contar é $\{2, 5, 9\}$, que corresponde à sequência $(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$; reciprocamente.

Como tais sequências de zeros e uns determinam os conjuntos que queremos contar, basta contarmos quantas elas são.

Para o que falta, considere inicialmente uma sequência de $2(n-k)+1$ termos, na qual os $n-k$ termos de índice par são iguais a 0.

$$\underbrace{(\_, 0, \_, 0, \_, \ldots, \_, 0, \_)}_{2(n-k)+1}$$

A fim de que haja exatamente k termos iguais a 1, sendo dois quaisquer deles não consecutivos, temos de escolher, do conjunto das $n-k+1$ posições ímpares, as k posições em que os termos serão iguais a 1 (observe que, como frisamos anteriormente, $n-k+1 \geq k$).

Há exatamente $\binom{n-k+1}{k}$ escolhas possíveis para tais posições. Após escolhermos k delas, apagando as posições não escolhidas ficamos com uma sequência satisfazendo as condições do enunciado. Reciprocamente, é imediato que toda sequência satisfazendo as condições do enunciado pode ser obtida dessa forma. $\square$

Terminamos este material com o exemplo a seguir, cuja solução necessita do uso de uma técnica diferente: uma contagem que necessita de uma divisão em casos totalmente não trivial.

Exemplo 5. *Quantos subconjuntos de* $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ *têm soma de seus elementos maior que* 232*?*

Solução. Evidentemente, listar todos os subconjuntos (há 2^{30} deles) e calcular as somas de seus elementos está fora de questão, até para um computador caseiro.

Uma outra ideia seria encontrar (se houver) um subconjunto com soma de elementos o mais próxima possível de 233 e, a partir daí, formar uma ideia quanto ao *tamanho* que um subconjunto com soma de elementos maior que 232 deve ter.

Essa ideia rapidamente revela-se infrutífera: por um lado, $30+29+28+27+26+25+24+23+22=234$, gerando o conjunto *pequeno* $\{22,23,24,25,26,27,28,29,30\}$ com soma de elementos maior que 232; por outro, apesar de qualquer agregação de elementos a esse conjunto gerar outro subconjunto com soma de elementos maior que 232, rapidamente percebe-se que também há uma quantidade impossível de controlar de trocas de elementos desse conjunto que geram outros subconjuntos com somas de elementos maior que 232; por exemplo,

$$\begin{aligned}&\{22,23,24,25,26,27,28,29,30\}\longmapsto\\&\longmapsto\{1,20,23,24,25,26,27,28,29,30\}\\&\longmapsto\{1,20,23,24,25,26,27,28,29,30\}\\&\longmapsto\ldots\ldots\end{aligned}$$

Entretanto, apesar de ruim, essa ideia gera facilmente a iniciativa de comparar a soma mínima desejada com a soma total, $1+2+\ldots+30$, e, conforme veremos, isso dá uma saída para o problema:

$$1+2+3+\ldots+30=\frac{(1+30)30}{2}=465,$$

e

$$\frac{465}{2}=232,5.$$

Ainda assim, a maneira de utilizar o fato de que a soma de todos os elementos é muito próxima do dobro de 233 é sutil: para todo subconjunto A de $\{1,2,3,\ldots,30\}$, temos

$$A\cup A^c=\{1,2,3,\ldots,30\}$$

(em que A^c denota o *complementar* de A), logo,

$$\sum_{x\in A}x+\sum_{x\in A^c}x=\sum_{j=1}^{30}j=465.$$

Então, dentre os números $\sum_{x\in A} x$ e $\sum_{x\in A^c} x$, o maior vale pelo menos $\lfloor \frac{465}{2} \rfloor + 1 = 233$ e o menor vale no máximo 232. Dessa forma, dentre os conjuntos A e A^c, exatamente um (mas não sabemos qual deles) satisfaz a condição do enunciado.

Reduzimos o problema, portanto, à contagem do número de pares A, A^c, em que A é um subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$. Como cada subconjunto tem seu complementar, cujo complementar é o subconjunto original (ou seja, $(A^c)^c = A$), concluímos que o número de pares A, A^c é precisamente a metade do número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, isto é,

$$\frac{2^{30}}{2} = 2^{29}.$$

Assim, $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$ tem 2^{29} subconjuntos com soma de elementos maior que 232. $\square$

Dicas para o Professor

Esse material foi parcialmente baseado nas seções 1.4 e 2.1 da referência [1]. Lá, bem como na referência [2], o leitor pode encontrar cursos completos de Combinatória básica.

O conteúdo aqui reunido pode ser apresentado em três sessões de 50 minutos cada, cada uma abordando dois dos exemplos acima. Idealmente, seria interessante o professor dividir a sala em duas partes e dar cerca de 10 minutos para cada uma das partes pensar em um dos problemas. Em seguida, 10 minutos adicionais poderiam ser gastos para discutir com toda a sala as estratégias e dificuldades que os alunos tiveram em abordar os problemas. Por fim, os demais 30 minutos poderiam ser divididos em duas etapas de 15 minutos, cada uma delas dedicada à apresentação da solução de um dos problemas propostos.

Há uma segunda versão do lema de Kaplansky, na qual se considera 1 e n como vizinhos. Para o leitor interessado, veja o problema 12 da seção 1.4 de [1].

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4: Combinatória*, terceira edição. Rio de Janeiro, SBM Editora, 2024.

2. J. Plínio de O. Santos et al. *Introdução à Análise Combinatória*, quarta edição. Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2007.