Material Teórico - Módulo Áreas de Figuras Planas

Áreas de Figuras Planas: Exercícios da OBMEP

Nono Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente

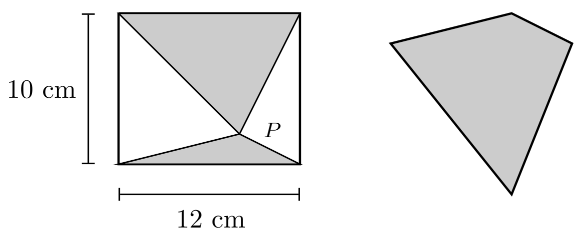
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

22 de dezembro de 2018

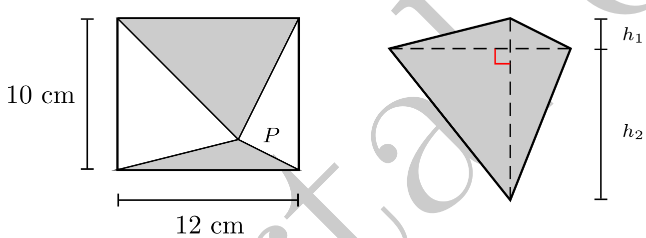
1 Problemas da OBMEP

Nesta aula, apresentaremos alguns problemas que envolvem cálculos de áreas de figuras planas. Tais problemas fizeram parte de provas da primeira fase da OBMEP.

Problema 1 (OBMEP-2013). *Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados, como na figura. Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é sua área?*



Solução. Note que a área do quadrilátero é igual à soma das áreas de dois triângulos cujas bases medem 12 cm; além disso, a soma das medidas das alturas dos dois triângulos (relativas à base comum) é igual a 10 cm (veja a figura abaixo), pois essa soma coincide com a medida do menor lado do retângulo. Desse modo, se denotarmos essas alturas por h_1 e h_2, teremos $h_1 + h_2 = 10$.

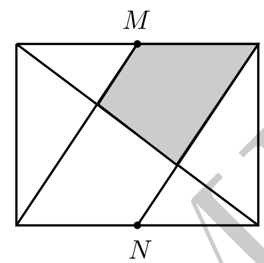


Portanto, a área do quadrilátero é igual a

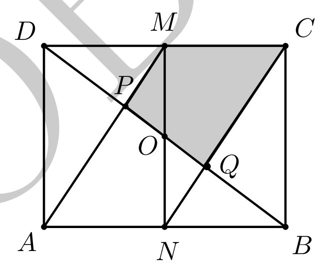
$$\begin{aligned}\frac{12h_1}{2} + \frac{12h_2}{2} &= 6h_1 + 6h_2\\ &= 6(h_1 + h_2)\\ &= 6 \cdot 10\\ &= 60\end{aligned}$$

centímetros quadrados. □

Problema 2 (OBMEP-2013). *A figura a seguir representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados do retângulo aos quais pertencem. Qual é a área da região sombreada?*



Solução. Denotemos por A, B, C e D os vértices do retângulo e por P, O e Q as interseções da diagonal BD com os segmentos AM, MN e NC, respectivamente (veja a próxima figura).



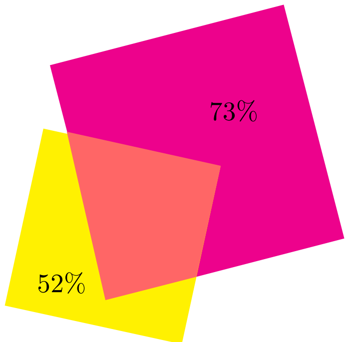
Veja que os triângulos DMO e BNO são congruentes pelo caso LAAo, uma vez que $\overline{DM} = \overline{BN}$, $M\widehat{D}O = N\widehat{B}O$ (ângulos alternos-internos) e $D\widehat{O}M = B\widehat{O}N$ (ângulos OPV); portanto, $\overline{OM} = \overline{ON}$.

Por outro lado, o quadrilátero $ANCM$ é um paralelogramo, pois os lados AN e CM são paralelos e congruentes. Assim, as retas suportes dos lados opostos AM e CN de tal paralelogramo são paralelas, de sorte que $O\widehat{M}P = O\widehat{N}Q$ e $O\widehat{P}M = O\widehat{Q}N$ (pois são pares de ângulos alternos-internos). Como já observamos que $\overline{OM} = \overline{ON}$, concluímos que os triângulos OPM e OQN são congruentes (dessa vez pelo caso ALA). Desse modo, a área cinza (do quadrilátero $PQCM$) é igual à área do triângulo MNC que, por sua vez, é igual a

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MC} \cdot \overline{MN}}{2} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{CB}}{2}\\ &= \frac{1}{4} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{CB}\\ &= \frac{1}{4} \cdot 120 = 30\end{aligned}$$

centímetros quadrados. □

Problema 3 (OBMEP-2013). *Dois quadrados de papel se sobrepõem como mostrado na figura a seguir. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua*



área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?

Solução. Denotemos por ℓ e L, respectivamente, as medidas dos lados do quadrado menor e do quadrado maior, e por A a medida da área comum aos dois quadrados. Então, A é igual a $100\% - 52\% = 48\%$ da área do quadrado menor e a $100\% - 73\% = 27\%$ da área do quadrado maior. Desse modo, temos que

$$\frac{48}{100} \cdot \ell^2 = \frac{27}{100} \cdot L^2.$$

Daí, obtemos

$$\frac{\ell^2}{L^2} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16},$$

ou seja,

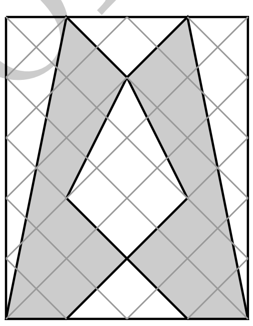
$$\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

Finalmente, uma vez que ℓ e L representam as medidas dos lados de dois quadrados, eles são números positivos e, assim,

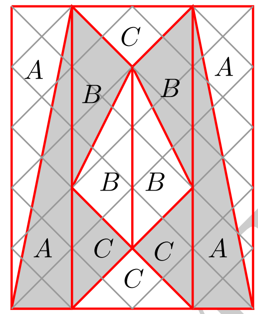
$$\frac{\ell}{L} = \frac{3}{4}.$$

□

Problema 4 (OBMEP-2012). *O retângulo abaixo, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?*

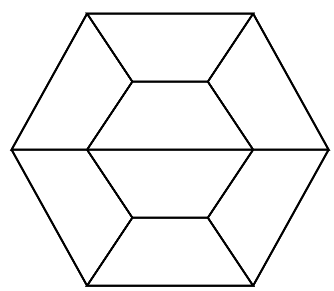


Solução. Dividimos a figura em regiões triangulares, indicadas pelas letras A, B e C na figura abaixo.



É imediato verificar que regiões marcadas com uma mesma letra são congruentes, logo, possuem mesma área. Por outro lado, tanto a parte branca quanto a parte cinza possuem duas regiões A, duas regiões B e duas regiões C. Logo, a área da parte cinza é igual à área da parte branca, de modo que cada uma dessas áreas (cinza e branca) é igual à metade da área do retângulo, que por sua vez é igual a $4 \cdot 5 = 20$ cm^2. Assim, concluímos que a área da parte cinza é 10 cm^2. □

Problema 5 (OBMEP-2012). *A figura abaixo foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cujas bases maiores medem 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?*

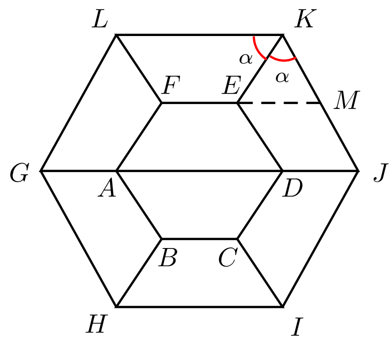


Solução. Como os trapézios isósceles que formam a figura são idênticos, temos que os hexágonos $ABCDEF$ e $GHIJKL$ da próxima figura são equiláteros e equiângulos, logo, regulares.

Seja M o ponto de interseção do prolongamento do segmento EF com o lado JK (veja novamente a figura a seguir). Uma vez que os ângulos internos dos hexágonos medem 120º e os trapézios são todos iguais, temos que o ângulo $\angle EKM$ tem medida $\alpha = \frac{120^o}{2} = 60^o$. Por outro lado, como KL e EF são paralelos e os ângulos $\angle KEM$ e $\angle EKL$ são alternos e internos, eles têm a mesma medida $\alpha = 60^o$. Assim, o triângulo KEM tem dois ângulos internos iguais a 60º, logo, é equilátero.

Agora, veja que $DJME$ é um paralelogramo (pois possui lados opostos paralelos) e

$$\overline{ME} = \overline{KE}$$



(pois KEM é equilátero) e

$$\overline{KE} = \overline{ED}$$

(pois os trapézios $KEDJ$ e $ADEF$ são iguais). Portanto, $DJME$ tem lados iguais, de forma que é um losango. Então,

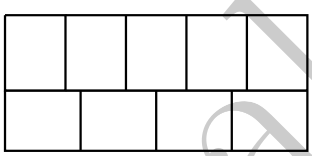
$$\overline{KM} = \overline{ME} = \overline{MJ}.$$

Concluímos, assim, que M é o ponto médio de JK e, daí, obtemos

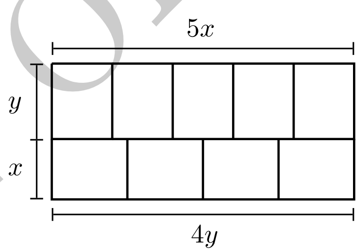
$$\overline{DE} = \overline{MJ} = \frac{\overline{JK}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

centímetros. $\square$

Problema 6 (OBMEP-2012). *A figura mostra um retângulo de área 720 cm^2, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?*



Solução. Denotemos por x e y, respectivamente, as medidas dos lados menor e maior de um dos retângulos menores (que são idênticos).

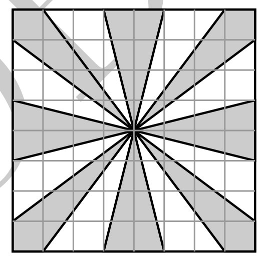


Desse modo, as medidas dos dois lados do retângulo maior são $x + y$ e $5x = 4y$. Logo, $y = \frac{5x}{4}$ e, como a área do retângulo maior é 720 cm^2, temos que

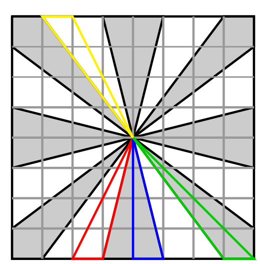
$$\begin{aligned} 5x(x+y) = 720 &\Longrightarrow 5x\left(x + \frac{5x}{4}\right) = 720 \\ &\Longrightarrow 5x \cdot \frac{9x}{4} = 720 \\ &\Longrightarrow \frac{45x^2}{4} = 720 \\ &\Longrightarrow x^2 = 64 \\ &\Longrightarrow x = 8. \end{aligned}$$

Daí, segue que $y = \frac{5 \cdot 8}{4} = 10$ cm, de sorte que o perímetro de um dos retângulos menores é igual a $2 \cdot (8 + 10) = 36$ cm. $\square$

Problema 7 (OBMEP-2011). *Na figura abaixo, os lados do quadrado foram divididos em oito partes iguais. Qual é a razão entre a área cinza e a área do quadrado?*

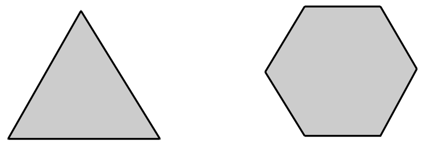


Solução. Veja que, nas notações da próxima figura, a área pintada de cinza corresponde a 8 triângulos congruentes ao destacado em azul e outros 8 triângulos congruentes ao destacado em verde. Note também que a área branca, que é a diferença entre a área do quadrado e a área cinza, corresponde a 8 triângulos congruentes ao destacado em vermelho e mais 8 congruentes ao destacado em amarelo.



Agora, observe que esses quatro tipos de triângulos possuem a mesma área, uma vez que têm bases e alturas de mesmas medidas. Assim, temos que a área branca é igual à área cinza, donde concluímos que a razão entre a área da região pintada de cinza e a área total do quadrado é $\frac{1}{2}$. $\square$

Problema 8 (OBMEP-2011). *Um triângulo equilátero e um hexágono regular têm o mesmo perímetro. A área do hexágono é 6 m^2. Qual é a área do triângulo?*



Solução. Denotando por x a medida do lado do triângulo e por y a medida do lado do hexágono, temos que

$$3x = 6y \Longrightarrow x = 2y.$$

Usando o fato de que a área do hexágono é igual a 6 m^2 e invocando a fórmula para o cálculo da área de um hexágono regular a partir da medida do seu lado, obtemos

$$\cancel{6} \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4} = \cancel{6} \Longrightarrow \frac{y^2\sqrt{3}}{4} = 1.$$

Por outro lado, a área do triângulo é dada por

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Mas

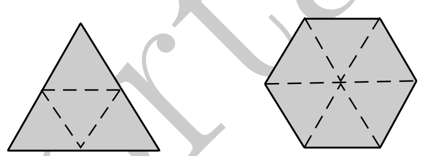
$$x^2 = (2y)^2 = 4y^2,$$

donde obtemos

$$A = \frac{4y^2\sqrt{3}}{4} = 4 \cdot \frac{y^2\sqrt{3}}{4} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ m}^2.$$

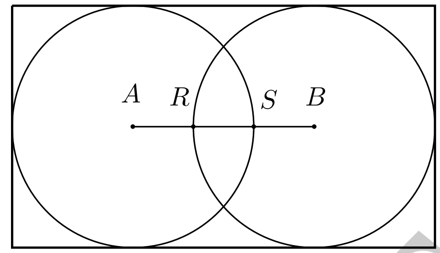
□

Uma solução mais intuitiva para o problema 8 consiste em dividir o hexágono em seis triângulos menores congruentes, dividir o triângulo em quatro triângulos menores congruentes e notar que esses dez triângulos menores são todos congruentes (uma vez que $y = \frac{x}{2}$ – veja a figura abaixo).

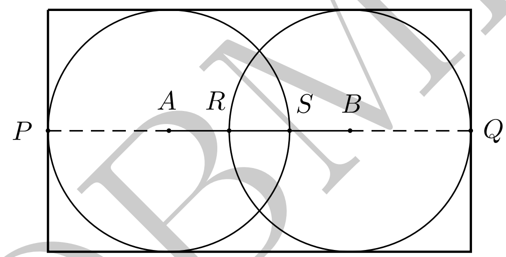


Assim, já que a área do hexágono é igual à soma das áreas de 6 desses triângulos, concluímos que cada um deles possui área igual a $\frac{1}{6} \cdot 6 = 1$ m^2, de maneira que a área do triângulo é 4 m^2.

Problema 9 (OBMEP-2010). *Na figura a seguir, os círculos de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?*



Solução. Vamos prolongar o segmento AB e marcar os pontos P e Q sobre os lados menores do retângulo (veja a figura a seguir).

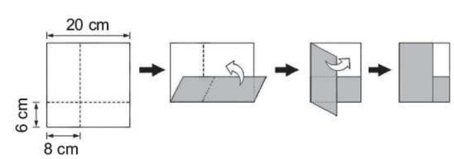


Observe que o lado maior do retângulo tem medida igual

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{PS} + \overline{SB} + \overline{BQ} \\ &= \overline{PS} + \underbrace{\overline{RB} - \overline{RS}}_{\overline{SB}} + \overline{BQ} \\ &= 4 + 2 - 1 + 2 \\ &= 7 \text{ cm} \end{aligned}$$

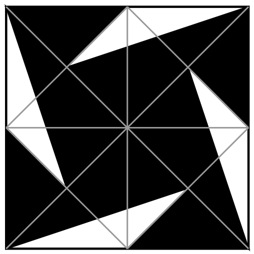
e a medida do lado menor é igual ao diâmetro dos círculos, ou seja, 4 cm. Portanto, o perímetro do retângulo é igual a $2 \cdot (7 + 4) = 2 \cdot 11 = 22$ cm. □

Problema 10 (OBMEP-2010). *Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como mostra a figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?*



Solução. Quando dobramos o quadrado pela primeira vez, ficamos com um retângulo de dimensões 20 cm e $20-6 = 14$ cm. Observe que a parte branca desse retângulo tem dimensões 20 cm e $20 - 2 \cdot 6 = 8$ cm. Quando dobramos a segunda vez, obtemos um retângulo de dimensões $20 - 8 = 12$ cm e 14 cm. A essa altura, a parte branca tem dimensões $20-2\cdot 8 = 20-16 = 4$ cm e $20-2\cdot 6 = 20-12 = 8$ cm. Portanto, a área da parte branca que ficou visível é igual a $4 \cdot 8 = 32$ cm^2. □

Problema 11 (OBMEP-2010). *A figura abaixo mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em preto corresponde a que fração da área do quadrado maior?*



Solução. O quadrado está dividido em quatro quadrados menores idênticos. Em cada um dos triângulos brancos, tomamos como base o lado que coincide com um dos lados de um quatro quadrados menores; dessa forma, sua altura relativa a esta base é igual à metade da medida do lado de um quadrado menor. Logo, a área de cada um dos triângulos brancos é igual a $\frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ da área de um dos quadrados menores. Como são quatro os triângulos brancos, segue que a área da parte branca é igual à área de $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ quadrado menor. Por sua vez, como área de um desses quatro quadrados menores é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior, concluímos que a área preta é igual a $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ da área do quadrado maior. □

Dicas para o Professor

Recomendamos que sejam utilizadas pelo menos três sessões de 50min para expor todos os problemas que compõem este material. Antes de apresentar as soluções dos problemas, é fundamental que os alunos disponham de algum tempo para tentar resolvê-los sozinhos. Caso eles não consigam, o professor pode dar dicas parciais e incentivar a solução. Os alunos que conseguirem resolver algum problema sozinhos devem ser encorajados a apresentarem suas ideias para o restante da turma, na lousa.

As referências a seguir abordam o material aqui reunido em maior profundidade e trazem vários outros exemplos resolvidos e problemas propostos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, Editora S.B.M., 2013.

2. O. Dolce, J. N. Pompeo. *Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Editora Atual, 2013.