Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo - Derivada como Função

Definição

Tópicos Adicionais

Autor: Tiago Caúla Ribeiro
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

11 de Agosto de 2023

PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

1 Derivada como função

Nas aulas anteriores, discutimos por meio de resultados e exemplos a noção de derivada. Desde então, denotamos o valor da derivada (caso exista) de uma função f em um ponto a de seu domínio por $f'(a)$ (notação de Lagrange).

Todavia, convém introduzir uma outra notação, devida a Leibniz, segundo a qual escrevemos $\frac{dy}{dx}\big|_{x=a}$ para indicar a derivada de $y = f(x)$ em a. Sendo assim, pondo $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$, tem-se, por convenção,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a),$$

caso o limite exista.

Por exemplo, de acordo com cálculos anteriores,

$$\left.\frac{d(x^3)}{dx}\right|_{x=-2} = 3x^2\big|_{x=-2} = 12,$$

enquanto $\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx}\big|_{x=0} = \cos x\big|_{x=0} = 1.$

A notação de Leibniz pode simplificar a escrita de algumas fórmulas importantes, facilitando sua memorização [1], como é o caso da *regra da cadeia* (veja o próximo módulo).

Com essas notações, sendo $y = f(x)$ uma função derivável, podemos denotar sua derivada tanto por f' quanto por $\frac{dy}{dx}$. Mais precisamente, dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, se $J \subset I$ for o conjunto dos pontos em que f é derivável, podemos definir a *função derivada*, ou *primeira derivada*, f' de f como

$$\begin{aligned} f' : J &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}, \tag{1}$$

sendo $\frac{dy}{dx}$ uma notação substituta para f'.

[1] É importante frisar que essa não foi a motivação original para introduzir a notação. Veja a seção "Dicas para o Professor".

2 Exemplos

Os próximos dois exemplos seguem da proposição 8 da aula *Funções Racionais*, do módulo *Leis do Limite - Parte 2*.

Exemplo 1. *Se* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é a função polinomial de grau* $n \geq 1$ *definida por*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

então a primeira derivada de p, $p' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *é a função polinomial de grau* $n - 1$ *dada por*

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1. \tag{2}$$

Exemplo 2. *Sejam* p *e* q *funções polinomiais,* $q \not\equiv 0$, *e* A *o conjunto das raízes reais de* q. *Então, a função racional* $r : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$, *dada por* $r(x) = p(x)/q(x)$, *admite função derivada* $r' : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$ *que se exprime pela regra*

$$r'(x) = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q(x)^2}. \tag{3}$$

Em particular, r' *também é uma função racional.*

Como aplicação da relação (3), sendo x um número real não nulo e n um inteiro negativo, temos

$$\frac{d(x^n)}{dx} = \frac{d(1/x^{-n})}{dx} = \frac{0 \cdot x^{-n} - (-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1}.$$

Exemplo 3. *De acordo com a primeira aula desse módulo, a primeira derivada da função modular é a função real de domínio* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e regra* $0 \neq x \mapsto x/|x|$.

Para o próximo exemplo — uma releitura do corolário 7 da aula *Reta Tangente - Parte 1* —, sejam $D = [0, +\infty)$ ou $D = \mathbb{R}$, conforme n seja par ou ímpar.

Exemplo 4. *Dado um número natural* n, *seja* $f : D \to \mathbb{R}$ *a função raiz n-ésima. Então, a primeira derivada de* f *é a função* $f' : D \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}. \tag{4}$$

Observação 5. *Em breve, provaremos que se m é um número* real *qualquer e x é positivo, então a função $0 < x \mapsto x^m$ é derivável, valendo*

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Por enquanto, constatamos nos exemplos anteriores a validade dessa fórmula se m for inteiro (exemplos 1 e 2) ou se $1/m$ for natural (exemplo 4).

Há exemplos de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sem derivada em ponto algum. De fato, veremos na próxima aula que uma função derivável em um ponto também é contínua nesse ponto. Portanto, se construírmos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos da reta, seguirá que f não é derivável em ponto nenhum.

Como um exemplo de função descontínua em cada número real, podemos tomar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}. \tag{5}$$

Com efeito, digamos, por contradição, que f fosse contínua em a. Tomando $\varepsilon = 1/2$ na definição de função contínua, existiria $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < 1/2. \tag{6}$$

Em particular,

$$|x - a|,|y - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1, \tag{7}$$

pois, pela desigualdade triangular e por (6), temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |[f(x) - f(a)] - [f(y) - f(a)]| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(a)| \\ &< 1/2 + 1/2 = 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, como existem números racionais e irracionais em cada intervalo aberto da reta [2], podemos escolher $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tais que $|x - a|$,$|y - a| < \delta$, de forma que $|f(x) - f(y)| = 1$, contradizendo (7).

Observação 6. *Sendo J o conjunto dos pontos nos quais uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável, pode ocorrer que:*

(i) $J = I$ (isto é, f é derivável), como nos exemplos 1 e 2;

(ii) $\varnothing \neq J \subsetneq I$, fato observado nos exemplos 3 e 4;

(iii) $J = \varnothing$, como no caso da função f definida por (5).

3 A derivada do logaritmo natural

Na aula *Continuidade em um Ponto - Parte II*, do módulo de funções contínuas, o número de Euler foi definido como

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{8}$$

Mais geralmente, temos o

Teorema 7. *Os limites a seguir são verdadeiros:*

(i)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{9}$$

(ii)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{10}$$

[2] Isto é, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são *densos* em $\mathbb{R}$. A densidade de $\mathbb{Q}$ consiste da proposição 2 da aula *Continuidade em um Ponto - Parte I*. Daí, dado um intervalo aberto (a,b), existe algum número racional r satisfazendo $a - \sqrt{2} < r < b - \sqrt{2}$, de sorte que $r + \sqrt{2}$ é um irracional do intervalo (a,b), verificando assim a densidade de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Prova. Primeiro vejamos como o limite em (i) implica a relação em (ii). Fazendo a mudança de variável $x = -t$ no primeiro limite, obtemos

$$\begin{aligned} e &= \lim_{t\to-\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}, \end{aligned}$$

sendo que, na última passagem, utilizamos a igualdade

$$\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} \Big/ \left(1+\frac{1}{t-1}\right),$$

juntamente com o fato de que

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = e \Rightarrow \lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Agora, provaremos (i). Como se trata de um limite para $x \to +\infty$, podemos supor $x \geq 1$ nos argumentos que seguem. Denotando por n_x a parte inteira do número real x, teremos $n_x \in \mathbb{N}$ e

$$n_x \leq x < n_x + 1,$$

para cada $x \geq 1$. Temos, então, as desigualdades

$$1 + \frac{1}{n_x+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n_x},$$

a partir das quais as propriedades de potências dão

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} &< \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n_x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \\ &< \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n_x+1} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1};\end{aligned}$$

em particular,

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}. \tag{11}$$

Observando que $n_x \to +\infty$ quando $x \to +\infty$, seguem da relação (8) as seguintes igualdades

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} = e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$

Logo, a partir das desigualdades em (11) e do teorema do confronto, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

□

Fazendo $x = 1/t$ nos limites (9) e (10), vem que

$$\lim_{t\to0^+}(1+t)^{1/t} = e = \lim_{t\to0^-}(1+t)^{1/t},$$

de onde obtém-se que

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t} = e. \tag{12}$$

Agora, temos informações suficientes para determinar a função derivada do logaritmo natural.

Teorema 8. *A primeira derivada do logaritmo natural é a função* recíproca*, definida nos reais positivos. Em outras palavras,* ln *é derivável e*

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}, \tag{13}$$

para cada número real positivo x.

Prova. Começaremos calculando a derivada de ln na origem. Pela continuidade da função logaritmo, a relação (12) permite escrever

$$\begin{aligned}\ln'(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{1/t}\\ &= \ln\Big[\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\Big] = \ln e = 1.\end{aligned}$$

Portanto, se $x > 0$, temos

$$\begin{aligned}\ln'(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(x+t)-\ln x}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\big(1+t/x\big)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(1+t/x)}{t/x}\right) \overset{h=t/x}{=} \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}\\ &= \frac{1}{x}\ln'(0) = \frac{1}{x},\end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. $\square$

Exemplo 9. *Mostre que a reta r, tangente ao gráfico da função* ln *no ponto de abscissa e, passa pela origem.*

Solução. De fato, utilizando a fórmula (13), temos

$$\left.\frac{d(\ln x)}{dx}\right|_{x=e} = \frac{1}{e}.$$

Assim, a reta r admite equação $y = \ln e + (x-e)/e = x/e$, de onde se vê que r passa pela origem. $\square$

4 A derivada da exponencial

Teorema 10. *A primeira derivada da função exponencial de base e é ela mesma. De outro modo, a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$, é derivável e*

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x, \tag{14}$$

qualquer que seja o número real x.

Prova. Seja $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função exponencial de base e. Assim, exp é a inversa de ln, uma função com derivada não nula em cada ponto do seu domínio (por (13)). Pela primeira parte do teorema 6 da aula *Reta Tangente - Parte I*, segue que exp é derivável em qualquer ponto $x = \ln y$, com

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln' y} = \frac{1}{1/y} = y = e^x,$$

como queríamos. □

Exemplo 11. *Se a é um número real positivo diferente de 1, demonstre as fórmulas*

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x \ln a}, \tag{15}$$

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a. \tag{16}$$

Solução. Pela fórmula da mudança de base, temos

$$\log_a x = \ln x / \ln a.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d(\log_a x)}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \right) \\ &= \frac{1}{\ln a} \cdot \ln'(x) = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Deixaremos a justificativa da 2ª fórmula a cargo do leitor, sugerindo que proceda como na prova do teorema 10. □

Corolário 12. *Funções logarítmicas e exponenciais são deriváveis. As regras de suas funções derivadas são expressas pelas fórmulas* (15) *e* (16).

Observação 13. *O leitor deve ter observado que o ponto crucial na obtenção da derivada de* ln *consistiu no cálculo de* $\ln'(0)$*. Na verdade, a relação* $\ln'(0) = 1$ *segue do exemplo 6 da aula* Várias Técnicas*, do módulo* Leis do Limite - Parte 2*. Para manter a exposição autossuficiente, decidimos evitar o uso daquele exemplo, já que a solução apresentada depende de uma interpretação geométrica da quantidade* $\ln x$ *que, em nosso curso, só será obtida quando tratarmos do conceito de integral.*

Dicas para o Professor

Em relação ao exemplo onde construímos uma função real, definida em $\mathbb{R}$ e sem derivada em nenhum ponto (veja (5)), vale a pena mencionar que existem funções *contínuas* de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ sem derivada em ponto nenhum (seção 9.7 da referência [1]).

A definição de derivada,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

como limite de um quociente de variações, relaciona-se com a notação $\frac{dy}{dx}$ introduzida nessa aula. Leibniz imaginava uma variação *infinitesimal* [3] dx (uma extrapolação da variação real Δx) da variável independente e a correspondente variação infinitesimal $dy = f(a + dx) - f(a)$ da variável dependente. Daí, tomava a *parte real* do quociente dy/dx daqueles infinitesimais como a derivada (ou taxa de variação instantânea) de f no ponto a.

Antes de exemplificar o processo, convém informar que essa abordagem via infinitésimos, por mais intuitiva que possa parecer, exigia, como proposto por Leibniz, a introdução dos chamados *números ideais*, perfazendo-se uma extensão númerica de $\mathbb{R}$, juntamente com um conjunto de leis e princípios que

[3] Em um sentido intuitivo, "infinitesimal" é o mesmo que "infinitamente pequeno".

se propunham a justificar as regras de cálculo. Como a formalização da teoria se mostrou não trivial e, de acordo com MACHADO (cf. [3]), "…como Leibniz e seus seguidores não forneceram uma base matemática bem fundada e convincente para o novo sistema numérico proposto, este foi tratado com muita suspeita e desconfiança por muitos matemáticos e filósofos dos séculos XVIII e XIX, culminando no gradual declínio da teoria dos ideais de Leibniz e na sua substituição pela teoria dos limites de Bernard Bolzano (1781-1848 A.D.) e Karl Weierstrass (1815-1897 A.D.), predominante até a atualidade e também conhecida como Método $\varepsilon - \delta$, cuja formulação é puramente aritmética. Tal método permitiu que os matemáticos removessem os números infinitesimais e infinitos dos cursos de Análise, e, em meados do século XIX, tais conceitos já haviam sido expurgados da comunidade matemática, assim como a dependência dos conceitos geométricos intuitivos e dos diagramas. Nesse período, os ideais de Leibniz persistiram apenas como ajudantes intuitivos para físicos, engenheiros e matemáticos que lidavam com integrais múltiplas, e assim permanecem sendo tratados pela maioria da comunidade matemática contemporânea."

Demorariam cerca de 300 anos para que a formulação leibniziana repousasse em bases sólidas. De fato, ao longo da década de 60 do século passado, Abraham Robinson, um matemático especializado em lógica, conferiu rigor ao conceito de infinitesimal ao dar significado matemático aos números ideais de Leibniz (agora chamados *hiperreais*). "E, em 1966, publicou seus resultados em seu aclamado livro *Non-standard Analysis* ([4]), fundando a área que ficaria conhecida como *Análise Não Padrão*." (MACHADO, [3].)

Passemos às formalidades. Primeiramente, existe um corpo ordenado $\mathbb{H} \supset \mathbb{R}$, *o corpo dos hiperreais*, contendo infinitesimais não nulos, em que $\delta \in \mathbb{H}$ é um infinitesimal se $|\delta| < x$, para cada número *real* positivo x. Algumas regras: a soma ou produto de infinitesimais ainda é um infinitesimal; o produto de um número real por um infinitesimal também resulta num infinitesimal; além disso, toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

admite uma única extensão $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. [4]

Por exemplo, vejamos como calcular $f'(a)$, para $a \in \mathbb{R}$, se $f(x) = x^3 - x + 1$. Devemos escolher um infinitesimal $dx \neq 0$, calcular $dy = f(a + dx) - f(a)$ e o quociente dy/dx, escrevendo-o na forma $r + \delta$, em que r é um número real e δ é um infinitesimal. A parte real r de dy/dx será a derivada de f em a (naturalmente, esperamos obter $f'(a) = 3a^2 - 1$).

Pois bem,

$$\begin{aligned} dy &= f(a + dx) - f(a) \\ &= [(a + dx)^3 - (a + dx) + 1] - (a^3 - a + 1) \\ &= dx\{(3a^2 - 1) + [3adx + (dx)^2]\}, \end{aligned}$$

de sorte que $dy/dx = (3a^2 - 1) + \delta$, sendo $\delta = 3adx + (dx)^2$ um infinitesimal. Assim, $f'(a) = 3a^2 - 1$, já que o 2º membro é a parte real de dy/dx. Afinal, Leibniz tinha razão.

Ao leitor interessado em uma introdução ao *Cálculo Infinitesimal*, sugerimos a referência [2].

Duas sessões de 50min devem ser suficientes para expor o conteúdo desse material.

Sugestões de Leitura Complementar

1. D. G. de Figueiredo. Análise I, segunda edição. São Paulo, LTC, 1996.

2. J. M. Henle, E. M. Kleinberg. *Infinitesimal Calculus*. New York: Dover, 2003.

3. G. P. Machado. *Introdução à Análise Não Standard*. Dissertação (Mestrado em Matemática) – IME, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2018.

4. A. Robinson. *Non-standard Analysis*. New Jersey: Princeton University Press, 1996.

[4]Para simplificar a notação, denotamos a função e sua extensão pela mesma letra.