Material Teórico - Módulo de Introdução ao Cálculo – Limites – Parte 1

Velocidade Instantânea

Tópicos Adicionais

Autor: Prof. Angelo Papa Neto
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

29 de agosto de 2020

O Cálculo permite que analisemos situações geométricas dinâmicas, ou seja, situações em que os objetos mudam de posição com o tempo. O objeto geométrico mais simples é o ponto e o movimento mais simples que um ponto pode fazer é em linha reta. Se a reta estiver em correspondência com os números reais, a posição do ponto em cada instante é determinada por um número real. Assim, o movimento de um ponto sobre uma reta pode ser descrito por uma função real de variável real (uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$).

1 Velocidade média e velocidade instantânea

Suponha que um ponto P esteja em movimento sobre uma reta. Para medirmos a posição desse ponto, consideramos essa reta como um *eixo orientado*, com origem O. Assim, em cada instante de tempo, o ponto P ocupa uma posição na reta, determinada por um número real $x(t)$ que corresponde à coordenada do ponto sobre a reta.

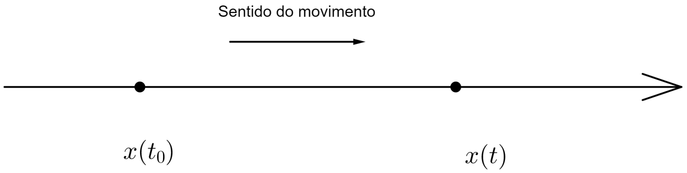
Costumamos medir o tempo a partir do instante $t = 0$, ou, se necessário, a partir de um instante $t = t_0 \geq 0$. A posição do ponto P no instante t_0 é chamada **posição inicial** do ponto e é denotada por $x_0 = x(t_0)$. Queremos medir quão rápido o ponto P se move sobre a reta, em um certo intervalo de tempo.

Suponhamos que, no intervalo de tempo $[t_0,t]$, com $t > t_0$, o ponto se move em um só sentido, digamos, no sentido positivo do eixo. Isto quer dizer que, se $t_1,t_2 \in [t_0,t]$ são tais que $t_1 < t_2$, então $x(t_1) < x(t_2)$, ou seja, a *função* $x : [t_0,t] \to \mathbb{R}$ é *crescente.*

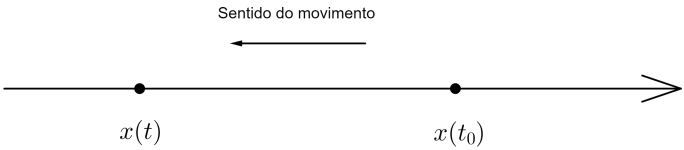
Usamos o símbolo $\Delta t = t - t_0$ para indicar o comprimento do intervalo $[t_0,t]$, ou seja, a duração do movimento. Usamos o símbolo Δx para indicar a distância que o ponto P percorreu durante o intervalo de tempo $[t_0,t]$, ou seja, $\Delta x = x - x_0 = x(t) - x(t_0)$. A **velocidade média** do ponto P no intervalo $[t_0,t]$ é, por definição, a razão

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Mantendo a hipótese de que x é uma função crescente no intervalo $[t_0,t]$, temos que $x(t) > x(t_0)$, logo, $\Delta x = x(t) - x(t_0) > 0$ e, portanto, $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$. Neste caso, o sentido do movimento coincide com a orientação do eixo (veja a figura a seguir).

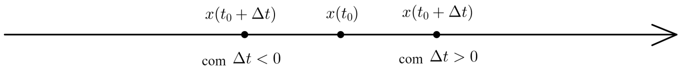


Caso a função x seja decrescente no intervalo $[t_0,t]$, temos $\Delta x = x(t) - x(t_0) < 0$ e $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} < 0$. Neste caso, o sentido do movimento é contrário à orientação do eixo (veja a figura a seguir).



Enfatizamos que, no intervalo $[t_0,t]$, estamos supondo que o ponto P se move sempre em um só sentido, ou seja, x é crescente nesse intervalo, ou decrescente nesse intervalo.

Se o intervalo de tempo for pequeno, obtemos a velocidade média de P quando ele se move "um pouco" a partir da posição $x_0 = x(t_0)$. Assim, à medida que diminuímos o intervalo de tempo Δt, encontramos v_m cada vez mais próxima da velocidade de P *exatamente* no instante t_0.



Podemos também considerar Δt negativo, de forma que a posição $x(t_0 + \Delta t)$ seja aquela ocupada pelo ponto P *um pouco antes* do instante t_0.

Definimos a **velocidade instantânea** $v(t_0)$, do ponto P no intante t_0, como o limite

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \tag{2}$$

ou

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Uma objeção inicial à noção de *velocidade instantânea* é o fato de que, em um instante, não há intervalo de tempo, portanto não há movimento, logo, não poderia haver uma velocidade. Para contornar essa dificuldade, devemos pensar na velocidade no instante t_0 como um número[1] associado ao ponto P que informa a *tendência* de movimento desse ponto nesse instante.

Na figura a seguir, sabemos que o pássaro voa da esquerda para a direita, embora tenhamos apenas uma imagem parada.

Isso é possível porque a disposição do corpo do pássaro no ar nos dá uma informação além da sua posição no instante: ela

[1] Em geral, a velocidade é uma grandeza vetorial. No caso do movimento *em uma reta*, a direção está fixada (é a direção da reta) e o sentido é dado pelo sinal da velocidade.

também nos diz qual é a *tendência* de movimento do pássaro. A velocidade instantânea funciona da mesma maneira. Associada à posição $x(t)$ do ponto P, em um instante de tempo t, ela nos diz qual é a tendência de movimento desse ponto. Em particular, ela nos permite estimar onde o ponto deve estar após uma pequena variação de tempo.

Exemplo 1. *Suponha que a posição de um ponto que se move sobre um reta varia de modo uniforme, ou seja, que a velocidade deste ponto seja* constante *ao longo do movimento. Sabendo que $x(0) = x_0$, calcule $x(t)$ para cada instante t.*

Solução. Seja v a velocidade (constante) do ponto. Então, $v(t) = v$, para todo t. Em particular, a velocidade média em qualquer intervalo é igual a v, ou seja,

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \frac{x(t) - x_0}{t}.$$

Assim, $x(t) = x_0 + vt$, para todo t.

Os cálculos acima garantem que, se o ponto P se move em uma reta com velocidade constante v, então sua posição é dada pela função *afim* $x(t) = x_0 + vt$. Neste caso, dizemos que o ponto P realiza um **movimento retilíneo uniforme**.

□

Exemplo 2. *Suponha que a posição do ponto P seja dada, em cada instante $t \geq 0$, pelo número $x(t) = at^2$, onde a é um número real não nulo. Encontre a velocidade do ponto em cada instante do movimento.*

Solução. Vamos usar o limite (3):

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t)^2 - at^2}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo o quadrado $(t+\Delta t)^2$ e efetuando algumas

matematica@obmep.org.br

simplificações óbvias, obtemos

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - at^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{at^2} + 2at\Delta t + a\Delta t^2 - \cancel{at^2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(2at + a\Delta t)\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (2at + a\Delta t) = 2at. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que a velocidade $v(t)$ em cada instante $t \geq 0$ é dada por $v(t) = 2at$. □

O exemplo anterior é especialmente importante porque a velocidade varia de modo *uniforme*. No próximo exemplo, vamos analisar o caso em que a posição $x(t)$ do ponto é dada, em função do tempo t, por uma expressão quadrática geral. (Observe que, na expressão para $x(t)$ no enunciado a seguir, denotamos o coeficiente de t^2 por $\frac{a}{2}$, ao invés de por a. Subsequentemente, justificaremos em termos físicos o porquê dessa escolha.)

Exemplo 3. *Suponha que a posição de um ponto em movimento sobre uma reta seja dada pela função quadrática* $x(t) = \frac{at^2}{2} + bt + c$*, onde* a*,* b *e* c *são números reais e* $a \neq 0$*. Encontre o significado dos coeficientes* b *e* c*.*

Solução. Fazendo $t = 0$, obtemos

$$x_0 = x(0) = \frac{a \cdot 0^2}{2} + b \cdot 0 + c = c.$$

Assim, $c = x_0$ é a posição inicial do ponto P.

Para calcular a velocidade do ponto em um instante t, recordemos que

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

com

$$\begin{aligned}x(t+\Delta t)-x(t) &= \frac{a}{2}\,(t+\Delta t)^2+b(\cancel{t}+\Delta t)+\cancel{c}\\ &\quad -\frac{a}{2}\,t^2-\cancel{bt}-\cancel{c}\\ &= \frac{a}{2}(\cancel{t^2}+2t\Delta t+(\Delta t)^2)+b\Delta t-\cancel{\frac{a}{2}t^2}\\ &= at\Delta t+\frac{a}{2}(\Delta t)^2+b\Delta t.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}v(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{at\Delta t+\frac{a}{2}(\Delta t)^2+b\Delta t}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(at+\frac{a}{2}\Delta t+b)\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(at+\frac{a}{2}\Delta t+b\right)\\ &= at+b,\end{aligned}$$

de sorte que $v_0=v(0)=b$ é a velocidade no instante $t=0$, chamada **velocidade inicial** do ponto P. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, veremos a seguir que o coeficiente a também tem um significado relevante.

Quando $a=0$, retornamos à situação do Exemplo 1, em que a velocidade é constante. Por outro lado, a fim de analisar o caso $a\neq 0$, e de modo análogo ao que fizemos para a velocidade, definimos a **aceleração média** do ponto P no intervalo de tempo $[t,t+\Delta t]$, de duração Δt, como sendo a razão

$$a_m=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}. \tag{4}$$

No Exemplo 3, já sabemos que a velocidade é dada, em cada instante t, por $v(t)=at+b$. Logo, a aceleração média no intervalo $[t,t+\Delta t]$ é dada por

$$a_m=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{(a(\cancel{t}+\Delta t)+\cancel{b})-(\cancel{at}+\cancel{b})}{\Delta t}=a.$$

Dessa forma, concluímos que o ponto P se move com aceleração constante. O movimento do ponto P em uma reta, com aceleração constante, é chamado **movimento retilíneo uniformemente acelerado**.

2 Movimento harmônico simples

Na seção anterior, vimos que um ponto P que se move em uma reta o faz de modo *uniforme*, isto é, com velocidade constante v, se sua posição no tempo é dada por uma função afim $x(t) = x_0 + vt$. Vimos também que, se a posição de P é dada por uma função quadrática $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$, então o ponto se move com aceleração constante, ou seja, é *uniformemente variado*.

Podemos considerar que $x(t)$ pode ser dado por outras funções conhecidas e, para cada escolha de uma dessas funções, podemos nos perguntar que tipo de movimento o ponto P reliza.

Por exemplo, se escolhermos $x(t)$ como uma função *periódica* do tempo, devemos esperar que o ponto P passe repetidas vezes por uma mesma posição, uma vez para cada repetição da função $x(t)$.

Assim, se $x(t) = \operatorname{sen} t$, o ponto P vai sempre se mover no intervalo $[-1,1]$ da reta orientada, descrevendo um movimento oscilatório em torno da origem 0. Se $A > 0$, e $x(t) = A \operatorname{sen} t$, então o ponto P se move no intervalo $[-A,A]$, razão pela qual o número A é chamado **amplitude** do movimento.

A função seno tem período 2π, ou seja, $\operatorname{sen}(t+2\pi) = \operatorname{sen} t$. Se quisermos que o movimento do ponto P seja periódico com período $T > 0$ arbitrário, devemos fazer um ajuste do ângulo, escrevendo $x(t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$. Com isso,

$$\begin{aligned} x(t+T) &= A \operatorname{sen}\left(2\pi \cdot \frac{t+T}{T}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T} + 2\pi\right) \\ &= A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = x(t). \end{aligned}$$

Chegamos, assim, à função

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{5}$$

que determina a posição de um ponto P, que se movimenta em uma reta, oscilando entre os pontos $-A$ e A e voltando a um mesmo ponto após um tempo T (o **período** do movimento). Por tais razões, dizemos que o ponto P realiza um **movimento harmônico simples** (abreviado **MHS**). Outra grandeza relacionada ao MHS é a **velocidade angular**, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Com essa notação, podemos escrever

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t). \tag{6}$$

Queremos calcular a velocidade $v(t)$ do ponto P em cada instante do MHS dado por (6). Conforme sabemos, essa velocidade é dada pelo limite

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A\,\mathrm{sen}\,\omega(t+\Delta t) - A\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Usando a expressão para o seno da soma, podemos simplificar o numerador da última expressão, escrevendo

$$\begin{aligned} &A\,\mathrm{sen}\,\omega(t+\Delta t) - A\,\mathrm{sen}(\omega t) = \\ &= A\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega \Delta t) + A\,\mathrm{sen}(\omega \Delta t)\cos(\omega t) - A\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ &= A\,\mathrm{sen}(\omega t)(\cos(\omega \Delta t) - 1) + A\,\mathrm{sen}(\omega \Delta t)\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} &\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \\ &= A\,\mathrm{sen}(\omega t)\left(\frac{\cos(\omega \Delta t) - 1}{\Delta t}\right) + A\cos(\omega t)\frac{\mathrm{sen}(\omega \Delta t)}{\Delta t} \\ &= A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\left(\frac{\cos(\omega \Delta t) - 1}{\Delta t}\right) + A\omega\cos(\omega t)\frac{\mathrm{sen}(\omega \Delta t)}{\omega \Delta t}. \end{aligned}$$

Para continuar o cálculo de $v(t)$ a partir desse ponto, vamos avaliar os valores da expressão

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

quando x toma valores próximos de zero. Na tabela abaixo, construída com o auxílio de uma calculadora científica, a primeira coluna exibe valores de x próximos de zero. A segunda coluna exibe os valores de $\operatorname{sen} x$, para cada valor de x dado na primeira coluna. Note que, à medida que x diminui, $\operatorname{sen} x$ fica cada vez mais próximo de x. Assim, na terceira coluna, os valores correspondentes para a razão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ficam cada vez mais próximos[2] de 1.

x	sen x	(sen x) / x
0,1	0,099833416646828	0,998334166468282
0,01	0,009999833334167	0,999983333416666
0,001	0,000999999833333	0,999999833333342
0,0001	0,000099999999833	0,999999998333333
0,00001	0,000010000000000	0,999999999983333
0,000001	0,000001000000000	0,999999999999833
0,0000001	0,000000100000000	0,999999999999998
0,00000001	0,000000010000000	1,000000000000000

Os dados da tabela acima *sugerem* que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \tag{7}$$

o que, de fato, é verdade. Devemos enfatizar, no entanto, que a mera análise da tabela, por mais extensa que esta seja, não é suficiente para que se estabeleça rigorosamente que o limite em questão é realmente igual a 1. Para isso, precisamos de uma demonstração, que faremos em uma aula posterior.

[2] O valor $1{,}00\ldots0$ – com quinze zeros – na última entrada da terceira coluna não significa que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ seja exatamente igual a 1 quando $x = 0{,}00000001$. Ele é simplesmente um reflexo do *grau de precisão* das aproximações feitas pela calculadora.

Por enquanto, vamos admitir a validade do limite em (7) e usá-lo para calcular a velocidade no movimento harmônico simples. Para tanto, precisaremos mostrar também que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0, \tag{8}$$

o que pode ser feito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x(\cos x + 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\cos x + 1} \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(-\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos x + 1} \right) \\
&= (-1) \cdot \frac{0}{1+1} = 0.
\end{aligned}$$

Voltando à última expressão obtida para $\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$, vemos que

$$\begin{aligned}
v(t) = &\lim_{\Delta t\to 0} A\omega \operatorname{sen}(\omega t) \left(\frac{\cos(\omega \Delta t) - 1}{\omega \Delta t} \right) \\
&+ \lim_{\Delta t\to 0} A\omega \cos(\omega t) \frac{\operatorname{sen}(\omega \Delta t)}{\omega \Delta t} \\
= &A\omega \operatorname{sen}(\omega t) \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{\cos(\omega \Delta t) - 1}{\omega \Delta t} \right) \\
&+ A\omega \cos(\omega t) \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\omega \Delta t)}{\omega \Delta t}.
\end{aligned}$$

Fazendo $u = \omega \Delta t$ em (7), e notando que $\Delta t \to 0$ se, e só se, $u \to 0$, vemos que

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\cos(\omega \Delta t) - 1}{\omega \Delta t} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\omega \Delta t)}{\omega \Delta t} = 1.$$

Assim,

$$v(t) = A\omega \operatorname{sen}(\omega t) \cdot 0 + A\omega \cos(\omega t) \cdot 1 = A\omega \cos(\omega t).$$

Na tabela a seguir, exibimos a posição e a velocidade do ponto P, em MHS de período T, nos instantes $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$ e lembrando que $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ e $v(t) = A\omega\cos(\omega t) = A\omega\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$:

t	$x(t)$	$v(t)$
0	0	$A\omega$
$T/4$	A	0
$T/2$	0	$-A\omega$
$3T/4$	$-A$	0
T	0	$A\omega$

Dicas para o Professor

O conteúdo desta aula pode ser coberto em três encontros de 50 min, sem contar o tempo de revisão dos pré-requisitos.

Vale a pena insistir que a escolha de movimentos retilíneos se deve à simplicidade deste tipo de movimento. Uma vez compreendido o movimento de um ponto sobre uma reta, em casos específicos, pode-se estudar o movimento de um ponto no plano, ou no espaço, atentando para o fato de, nestes casos, ser necessário considerarem-se, respectivamente, pares ordenados $(x(t),y(t))$ e trios ordenados $(x(t),y(t),z(t))$, onde as coordenadas são dadas como funções do tempo.

A discussão em torno do significado da velocidade instantânea é importante. Acreditamos que a analogia com a figura do pássaro, como fizemos no texto, pode ser útil.

Neste texto, optamos por não fixar unidades de medida para posição, velocidade ou aceleração, mas você pode explorar exemplos em que essas unidades apareçam.

No cálculo da velocidade instantânea para o movimento harmônico simples, precisamos usar o limite trigonométrico fundamental, sem demonstrá-lo (por enquanto). Você deve enfatizar que a mera análise de uma tabela com valores próximos de zero não é suficiente para que se conclua a validade do limite.

As sugestões de leitura a seguir podem ser consultadas para mais exemplos e aprofundamento.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção Profmat, Editora S.B.M., Rio de Janeiro, 2015.

2. G. B. Thomas, et. al. *Cálculo*, vol.1. Pearson, 12^a edição, São Paulo, 2014.